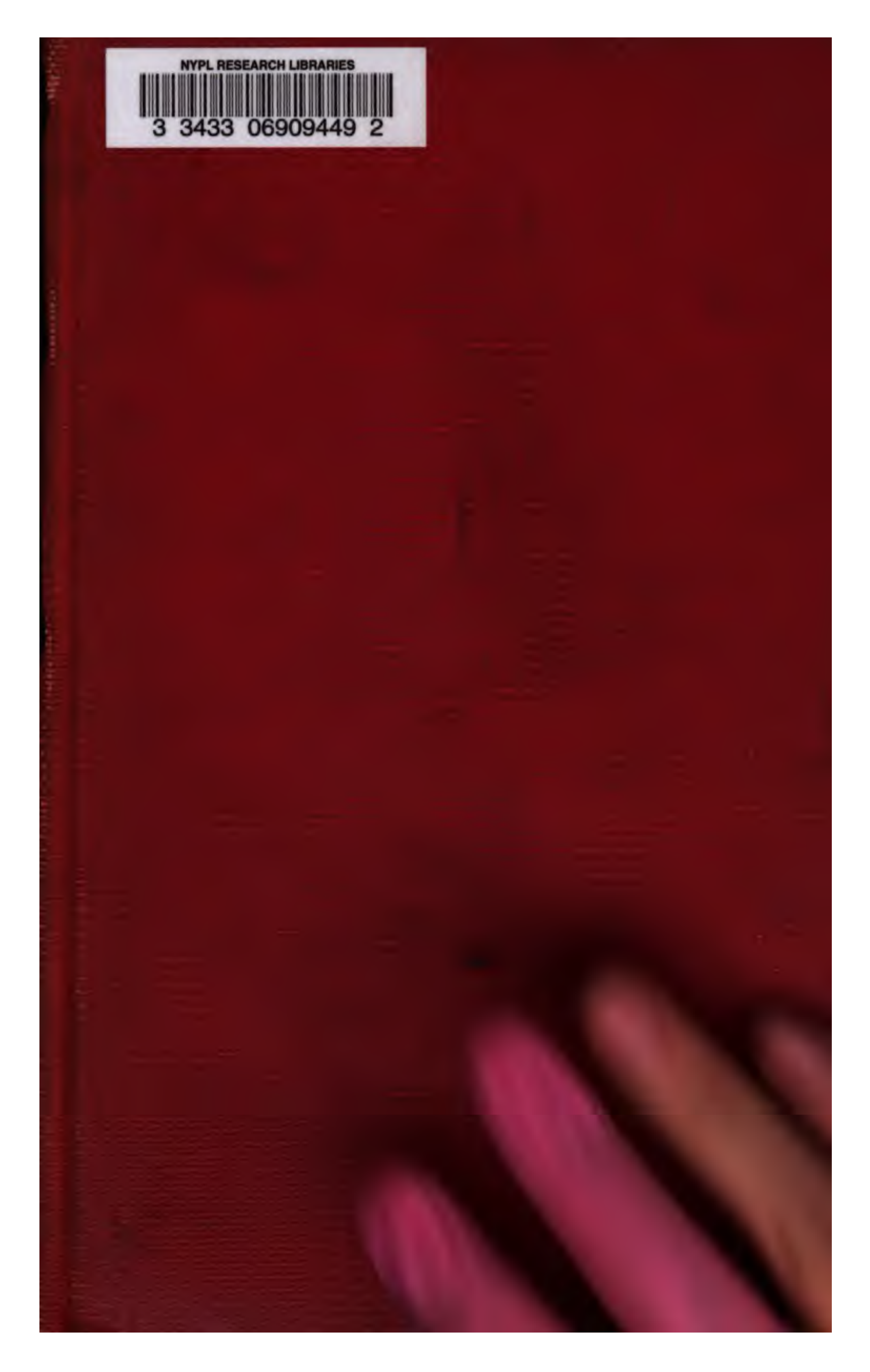

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909449 2







Der polynomische Lehrsatz und leichte Anwendungen desselben

zum ersten Unterricht für Anfänger

dargestellt

von

Heinrich Wilhelm Brandes
Professor an der Universität in Breslau.

Leipzig
bei Johann Ambrosius Barth
1820.

Vorbereitungen

zur

höheren Analysis

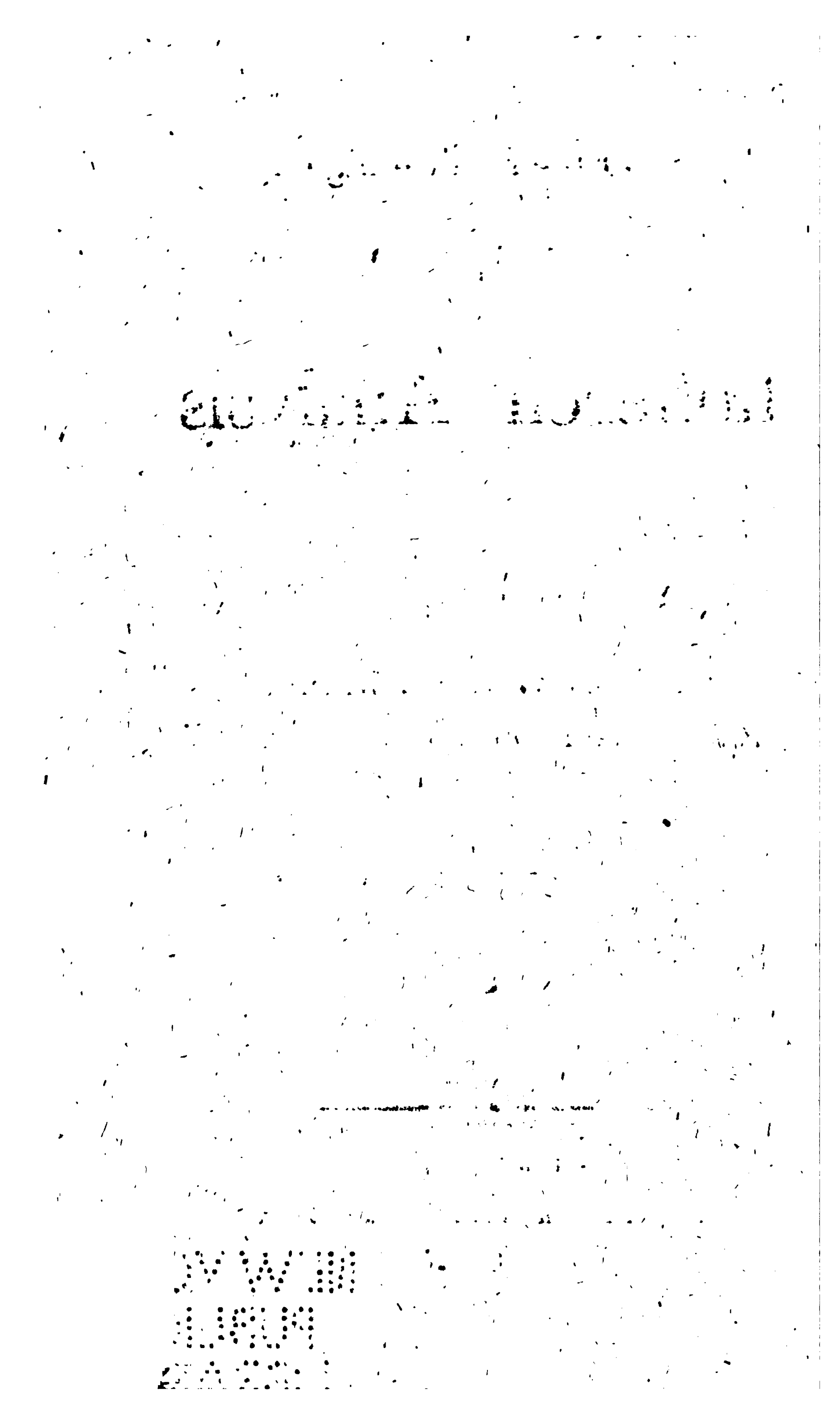
von

Heinrich Wilhelm Brandes

Professor an der Universität in Breslau.



Leipzig
bei Johann Ambrosius Barth.
1820.



Vorrede.

Wenn die Herausgabe dieses kleinen Buches einer Entschuldigung bedarf, so wird man diese, hoffe ich, darin finden, dass bis jetzt kein für Anfänger bestimmtes Lehrbuch vorhanden ist, worin die hier vorgetragenen Lehren so vollständig entwickelt wären, als es hier geschieht. Die allerdings vollständigern und sehr vorzüglichen Werke von Kramp, und Thibaut sind theils für die Anfänger zu schwer, theils enthalten sie auch zu viel, und sind daher für den nicht passend, der zuerst

nur das Wichtigste, die Grundlage von allen übrigen, soll kennen lernen. Daher habe ich schon seit mehrern Jahren das Bedürfniſs empfunden, die hier im Druck erscheinende kurze Darſtellung der Lehre vom Polynomischen Lehrsatze auszuarbeiten und sie meinen Vorlesungen zum Grunde zu legen. Ich habe empfunden, daſs ſie nicht nur von meinen Zuhörern mit Beyfall aufgenommen wurde und selbſt der Fassungskraft derer entsprach, welche nur mit den gewöhnlichsten Vorkenntnissen auf die Universität kamen; sondern daſs sie auch als Einleitung zur höhern Analysis hinreichend ist, so daſs man auf die Erläuterung der hier behandelten Gegenstände die Differential-Rechnung sogleich kann folgen lassen.

Gegen die Anordnung des Ganzen wird man, glaube ich, nichts zu erinnern finden. Allerdings kömmt in der erſten Abtheilung Einiges vor, was nicht unmittelbar in Beziehung

mit dem polynomischen Lehrsatze steht; aber die Sätze, von welchen dieses gilt, stehen doch in so naher Beziehung mit denen, die nothwendig mußten abgehandelt werden, daß es unpassend wäre, sie hier übergehen zu wollen. In der Darstellung bin ich, zumal im Anfange, ausführlich gewesen, und habe vorzüglich gesucht, überall dem Leser eine leichte Uebersicht zu gewähren, ihn sogleich auf den Hauptgegenstand der Untersuchung zu leiten, und ihm die Hauptsätze in klar ausgesprochenen Lehrsätzen oder als Auflösung von Aufgaben so darzulegen, daß er schon von selbst genöthiget wird, seine ganze Aufmerksamkeit dorthin zu wenden. Es hat mir immer geschienen, als ob diese Einrichtung des Vortrags, die auch Euler fast immer wählte, entschiedene Vorzüge vor derjenigen habe, die in den meisten neuern, namentlich französischen Büchern befolgt wird, wo man Schluß an Schluß reihet, und es dem Leser überläßt

den eigentlichen Hauptpunkt aus den längen Paragraphen hervorzusuchen.

Dafs ich in der Darstellung einiger Lehren andern Schriftstellern, namentlich Thibaut, gefolgt bin, wird man mir wohl nicht zum Vorwurf machen. Der Beweis für die Richtigkeit des binomischen Lehrsatzes wenn der Exponent ein Bruch ist, kann, wie mich dünkt, auf keine bessere Weise geführt werden, als Thibaut ihn führt, und diesen wird man immer von dorther borgen müssen, wenn man ihn gut vortragen will. Dagegen wird man bey andern Lehren die Darstellung eigenthümlich und, wie ich hoffe, leichter als bey andern Schriftstellern finden; wenigstens habe ich immer mit der gröfsten Sorgfalt nach derjenigen Entwickelungs-Art gestrebt, die mir am angemessensten für Anfänger schien und die bey vollkommener Gründlichkeit sich am leichtesten übersehen und auffassen läfst.

Ich neme das Buch ein für Anfänger bestimmtes, weil es aufser den Anfangsgründen der Arithmetik fast gar nichts voraussetzt; in einigen Abschnitten wird freylich auch Trigonometrie*) und einige Kenntniſs der Lehre von den höhern Gleichungen erfordert; aber diese Gegenstände wird man wohl immer bey Schülern, die geneigt ſind ſich näher mit der Analysis bekannt zu machen, voraussetzen dürfen.

In Rücksicht auf die Behauptung, daſs man nach der Erklärung der in diesem Buche vorkommenden Lehren sogleich die Differential-Rechnung könne folgen lassen, sey es mir erlaubt, noch eine Bemerkung hinzuzufügen. Jene Behauptung will nur das sa-

---

*) Die Hinweiſungen auf Sätze der Arithmetik und Trigonometrie, welche zuweilen vorkommen, beziehen sich auf das von mir herausgegebene Lehrbuch der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie.

gen, dafs der Anfänger durch die hier vorgetragenen Lehren hinreichend vorbereitet wird, um die Rechnungen, deren er dort bedarf, auszuführen, die Formeln zu entwikkeln u. s. w.; aber allerdings halte ich von einer andern Seite her noch eine zweyte Vorbereitung für nothwendig. Man sollte nämlich, um die Begriffe selbst, auf welche es bey der Differential- und Integral-Rechnung ankömmt, richtig und klar zu entwickeln, allemal eine recht gründliche und vollständige Darstellung der analytischen Geometrie, der höhern Analyfis vorausschicken, indem nichts beffer dient, um die so oft besprochene Schwierigkeit, die man beym Uebergange von Differenzen zu Differentialen zu finden meint, gänzlich zu heben, als eine genaue Bekanntschaft mit den krummen Linien, mit der Erforschung ihrer Eigenschaften u. s. w. Eine solche genaue und vollständige Darstellung der analytischen Geo-

metrie pflege ich gleichzeitig mit den hier vorgetragenen Lehren in einer eignen Reihe von Vorlesungen abzuhandeln, und da es uns an einem Lehrbuche der höhern Geometrie gänzlich fehlet, (indem die vorhandenen zu wenig umfassen), so bin ich auch geneigt den Versuch zu wagen, ob ich auch diesen Mangel ersetzen könnte. Indess geht meine Absicht dahin, dann ein vollständiges, die ganze höhere Geometrie umfassendes Buch zu liefern, von dem jene, der höhern Analysis voranzuschickenden Lehren nur den ersten Theil ausmachen würden. Ich würde mir die Freyheit nehmen, die Herren Recensenten auf dieses neue Werk zu Gaste zu bitten, wenn ich nur erst wüsste, ob sie nicht schon dieses Mal, schimpfend über schlechte Kost, mein Buch aus der Hand legen. Da ich dieses nicht weiss, so muss ich ihnen gänzlich anheim stellen, ob sie mich jetzt und künftig mit ihrem geneigten oder unge-

neigten Zuspruche beehren wollen, und habe hier nichts weiter hinzuzusetzen, als dass ich ihre Belehrung, selbst wenn sie in ungeneigter Form gegeben würde, immer mit Dank annehmen werde.

Breslau, am 19. März 1820.

H. W. Brandes.

Erste Abtheilung.

Untersuchungen,

welche als

Einleitung zur Entwickelung des polynomischen Lehrsatzes dienen.

Erster Abschnitt.

Von den figurirten Zahlen.

1. Erklärung. Wenn man die Reihe der natürlichen Zahlen so addirt, daſs zuerst nur die Eins, dann eins und zwei, dann eins, zwei und drei u. s. w. zusammengenommen werden: so erhält man die unter dem Namen der Trigonalzahlen bekannten Zahlen. Nimmt man von diesen wieder die erste, die erste und zweite, die erste, zweite und dritte und so ferner zusammen, so bekömmt man die Reihe der Pyramidalzahlen. Eine Reihe, welche die Summen dieser darstellte, würde sich an sie anschliessen, und so könnte man eine ganze Folge regelmässig geordneter Zahlenreihen erhalten, welche die figurirten Zahlen heissen.

2. Erklärung. Da man die natürlichen Zahlen als Summen der nach und nach zusammen genommenen Glieder der Reihe 1, 1, 1, 1, u. s. w. ansehen kann: so machen die natürlichen Zahlen selbst die erste Ordnung der figurirten Zahlen aus. Die Zahlenreihe 1, 3, 6, 10, 15, welche die Summen der immer um ein Glied weiter fort zusammen genommenen Reihe der natürlichen Zahlen

darstellt, heifst die **zweite Ordnung der figurirten Zahlen.** Nimmt man diese summirend zusammen, so dafs man zuerst die erste, die erste und zweite vereinigt, die drei ersten vereinigt u. s. w. setzt: so erhält man die **dritte Ordnung** u. s. f.

Beispiele: 1 3 6 10 15 bilden die zweite,
1 4 10 20 35 die dritte,
1 5 15 35 70 u. s. w. die vierte Ordnung.

Folgende Tafel stellt die Anfangszahlen der ersten zwölf Ordnungen dar.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455
5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820
6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188
7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564
8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388
9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970
10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	293930
11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	352716	646646
12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	352716	705432	1352078
13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293930	646646	1352078	2704156
14	105	560	2380	8568	27132	77520	203490	497420	1144066	2496144	5200300
15	120	680	3060	11628	38760	116280	319770	817190	1961256	4457400	9657700

3. Anmerkung. Der Name Trigonalzahlen hat daher seinen Ursprung, weil man eine dreieckige Form erhält, wenn man in die erste Reihe 1, in die zweite 2, in die dritte 3, in die vierte 4 legt, oder so wie in nebenstehender Figur zeichnet. Die Summe der in einer, in zwei, in drei Zeilen enthaltenen Vierecke gibt die Reihe der Trigonalzahlen. Denkt man sich über eben jener Zeichnung eine Schichte von 10 Würfeln, auf diese eine Schichte von 6 Würfeln, auf diese eine Schichte von 3 Würfeln, endlich auf diese noch 1 Würfel gelegt: so hat man eine Pyramide, in welcher die obere Schichte, die Summe der beiden oberen Schichten, die Summe der drei obern Schichten u. s. w., so viel Würfel enthalten, als die ersten Pyramidalzahlen angeben.

4. Bemerkung. Es ist nicht schwer, alle diese figurirten Zahlen nach der Ordnung anzugeben, wenn nämlich die niedrigern Ordnungen schon berechnet sind. Jede Ordnung fängt mit 1 an, und indem man dazu die zweite Zahl der nächst niedrigern Ordnung addirt, erhält man die zweite jener Ordnung; legt man dazu die dritte der nächst niedrigern Ordnung, so erhält man die dritte eben jener Ordnung, und so entsteht offenbar die $(n+1)$te jener Ordnung, wenn man die n^{te} eben derselben Ordnung mit der $(n+1)^{ten}$ der nächst niedrigern Ordnung zusammen nimmt. Die n^{te} Zahl unserer Ordnung ist nämlich gleich der Summe aller n Zahlen der nächst niedrigern Ordnung, und indem man dieser n^{ten} Zahl unserer Ordnung die $(n+1)^{te}$ der nächst niedrigern Ordnung hinzufügt: so erhält man in der $(n+1)^{ten}$ Zahl unserer Ordnung die Summen aller $(n+1)$ ersten Zahlen der nächst niedrigern Ordnung.

Um aber die sämmtlichen figurirten Zahlen auch einzeln, ohne schon alle vorhergehende zu kennen, finden zu können, sind noch besondere Regeln nöthig.

5. Erklärung. Wenn das Gesetz einer Reihe so gegeben ist, daſs man die Gröſse jedes Gliedes aus seinem **Zeiger** oder **Index**, das heiſst, aus der Zahl,

welche angibt das wie vielte Glied es ist, bestimmen kann, so heifst der Ausdruck, welcher jedes Glied angibt, das allgemeine Glied der Reihe.

Beispiel. In der Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w. ist das n^{te} Glied $= (2n - 1)$, und dieser Ausdruck ist folglich das allgemeine Glied dieser Reihe. In der arithmetischen Progression 7, 11, 15 ist das n^{te} Glied $= 7 + 4(n - 1)$.

6. Der Ausdruck, welcher das n^{te} Glied angibt, dient offenbar auch, um das $(n+1)^{te}$ Glied zu finden, wenn man nur in jenem Ausdruck $n+1$ statt n schreibt. Wenn man daher beweisen kann, erstlich, dafs ein angegebener Ausdruck für das allgemeine Glied richtig sey für das erste Glied, und allenfalls für einige der ersten Glieder; zweitens, dafs er für jedes $(n+1)^{te}$ Glied gültig bleibt, wenn er für das n^{te} galt, so ist die wahre Richtigkeit des allgemeinen Gliedes vollständig dargethan. Zum Beispiel in der Reihe 7, 11, 15 ist jedes folgende Glied um 4 gröfser als das nächst vorhergehende; war also das n^{te} Glied $= 7 + 4(n - 1)$, so ist das $(n+1)^{te} = 7 + 4(n-1) + 4 = 7 + 4n$, dieses ist eben der Ausdruck in Beziehung auf $(n+1)$, wie der vorige in Beziehung auf n, nämlich 7 addirt zu dem Vierfachen des um 1 verminderten Index; das allgemeine Glied gibt also das $(n+1)^{te}$ richtig an, wenn es das n^{te} richtig angab; nun aber gibt es für $n = 1$, das erste richtig an, also auch das zweite und alle folgenden.

7. Aufgabe. Jede n^{te} Zahl in der zweiten Ordnung der figurirten Zahlen zu finden.

Auflösung. Sie ist $= \frac{n.(n+1)}{2}$.

Beweis*). 1. Diese Regel gibt die erste Zahl richtig an; denn für $n = 1$ ist $\frac{n.(n+1)}{2} = \frac{1.2}{2} = 1$, die erste Zahl der zweiten Ordnung.

*) Die Summe der n ersten natürlichen Zahlen ist bekanntlich (Arithm. §. 156.) $= \frac{n.(n+1)}{2}$.

2. Wenn die Regel richtig ist bis zur n^{ten} Zahl, so ist sie auch noch für die $(n+1)^{te}$ richtig. Denn diese $(n+1)^{te}$ Zahl der zweiten Ordnung entsteht, wenn man die n^{te} der zweiten Ordnung $= \frac{n.(n+1)}{2}$, zur $(n+1)^{ten}$ der ersten Ordnung $= n+1$ addirt. Dadurch erhält man $(n+1) \left\{\frac{n}{2}+1\right\} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, welche aus $(n+1)$ eben so hergeleitet ist, wie $\frac{n.(n+1)}{2}$ aus n.

3. Galt die Regel also bis zum n^{ten} Gliede, so gilt sie auch noch bei dem $(n+1)^{ten}$ Gliede; nun aber galt sie bei dem ersten, sie ist also auch richtig bei dem zweiten, und folglich bei dem dritten und jedem folgenden.

8. Aufgabe. Die n^{te} Zahl der dritten Ordnung der figurirten Zahlen zu finden.

Auflösung. Sie ist $= \frac{n.(n+1).(n+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$

Beweis. Auch hier läfst sich zeigen, dafs dieser Ausdruck richtig bleibt für das $(n+1)^{te}$ Glied, wenn er für das n^{te} richtig war. Es entsteht nämlich das $(n+1)^{te}$ Glied, wenn man das n^{te} unsrer Ordnung zu dem $(n+1)^{ten}$ der zweiten Ordnung addirt. Wir nehmen an, das n^{te} unsrer Ordnung sey $= \frac{n.(n+1).(n+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$, u. das $(n+1)^{te}$ der zweiten Ordn. war $= \frac{(n+1)(n+2)}{1\ .\ 2}$ also das $(n+1)^{te}$ unsrer Ordn. $= \frac{(n+1).(n+2)}{1\ .\ 2}\left(\frac{n}{3}+1\right)$.

$= \frac{(n+1).(n+2)(n+3)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$, und dieser Ausdruck ist ebenso aus $(n+1)$ hergeleitet, wie das n^{te} Glied aus n.

Der Ausdruck für das allgemeine Glied gibt aber das erste Glied richtig; denn für $n = 1$ gibt er $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$; er wird also für das nächst folgende gelten, und der Beweis, daſs er immer auch für das nächste Glied gelten wird, läſst sich von Glied zu Glied fortführen.

Beispiel. Die 30te figurirte Zahl der dritten Ordnung ist $= \frac{30 \cdot 31 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4960$.

9. Aufgabe. Die n^{te} Zahl der r^{ten} Ordnung der figurirten Zahlen zu finden.

Auflösung. Sie ist $= \frac{n \cdot (n+1)(n+2) \ldots (n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r}$, oder man erhält sie, wenn man alle ganzen Zahlen von n bis $(n+r-1)$ in einander multiplicirt, und mit dem Produkte aller ganzen Zahlen von 1 bis r dividirt.

Beweis. Wir wollen annehmen, die Regel sey gültig gewesen für alle Glieder der $(r-1)^{ten}$ Ordnung, und sey in der r^{ten} Ordnung wenigstens bis zum n^{ten} Gliede gültig: so ist das n^{te} Glied der r^{ten}

Ordnung $= \frac{n, (n+1) \ldots (n+r-1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots r}$

und das $(n+1)^{te}$ Glied der $(r-1)^{ten}$ Ordnung

$$= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \ldots (n+1+r-2)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (r-1)}$$

die Summe beider $= \frac{(n+1)(n+2) \ldots\ldots (n+r-1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (r-1)} \left\{ \frac{n}{r} + 1 \right\}$

$= \frac{(n+1)(n+2) \ldots (n+r)}{1 \cdot 2 \ldots r}$ gibt das $(n+1)^{te}$ Glied der r^{ten} Ordnung ganz so ausgedrückt, wie es das allgemeine Glied forderte.

Der Ausdruck bleibt also richtig für jedes nächste Glied, wenn er für die niedrigere Ordnung und

für die niedrigern Glieder unserer Ordnung galt. Folglich ist der Ausdruck richtig für jedes Glied der vierten Ordnung, weil er galt für jedes Glied der dritten (§. 8.), und für das erste der vierten, welches $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1$ ist. Eben so gilt er für die fünfte Ordnung, deren erstes Glied er richtig angibt, weil er für die vierte Ordnung richtig war u. s. w.

Beispiel. Die 50ste Zahl der 7ten Ordnung ist, wenn man $n = 50$, $r = 7$ setzt

$$= \frac{50 \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 \cdot 55 \cdot 56}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

Zweiter Abschnitt.

Von den arithmetischen Progressionen höherer Ordnungen.

10. Erklärung. Wir nannten in der Arithmetik (Arithm. §. 150.) eine arithmetische Progression diejenige Reihe von Zahlen, bei denen der Unterschied zweier zunächst auf einander folgenden überall gleich war; diese nennen wir jetzt arithmetische Progressionen der ersten Ordnung.

Dagegen verstehen wir unter einer arithmetischen Progression der zweiten Ordnung eine Reihe von Zahlen, welche so beschaffen ist, daſs die Unterschiede zwischen dem ersten und zweiten, dem zweiten und dritten, dem dritten und vierten Gliede und sofort zwischen den nächsten auf einander folgenden Gliedern, eine arithmetische Progression der ersten Ordnung bilden.

Eine arithmetische Progression der dritten Ordnung ist eine Reihe von Zahlen, deren Unterschiede von Glied zu Glied fortschreitend gesucht, eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung bilden. Und eben so bestimmt man leicht den Be-

griff der arithmetischen Progressionen höherer Ordnungen.

Beispiele. Progressionen der ersten Ordnung sind bekannt: z. B. 1; 3; 5; 7; 9; 11.

Eine Progression der zweiten Ordnung ist

1; 4; 9; 16; 25; 36; 49;

denn die Unterschiede zwischen je zwei nächsten Gliedern sind 3; 5; 7; 9; 11; 13;

und bilden eine Progression der ersten Ordnung.

Die Zahlen 1; 8; 27; 64; 125; 216; stellen eine arithmetische Progression der dritten Ordnung dar, da die Reihe der Unterschiede 7; 19; 37; 61; 91 eine Progression der zweiten Ordnung ist, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man hier wieder die Unterschiede nimmt, welche 12; 18; 24; 30

sind, und eine Progression der ersten Ordnung geben.

11. Erklärung. Wenn man die Unterschiede zwischen den nächsten Gliedern einer Reihe nach der Folge der Glieder sucht, so nämlich, dafs man den Unterschied zwischen dem ersten und zweiten Gliede, zwischen dem zweiten und dritten u. s. w. nimmt, und aus ihnen eine nach der Folge der Unterschiede geordnete Reihe bildet: so heifst sie die erste Differenzreihe jener Reihe. Nimmt man eben so die Unterschiede der Glieder dieser Differenzreihe, so erhält man die zweite Differenzreihe u. s. w.

12. Die Differenzreihen dienen also, um zu erkennen, ob irgend eine vorgelegte Zahlenreihe eine arithmetische Progression irgend einer Ordnung sey, und welcher Ordnung.

13. Erklärung. Wenn man in einer gegebenen Reihe die Summen der Glieder so nimmt, dafs man zuerst das erste Glied allein, dann die Summe der zwei ersten Glieder, dann die Summe der drei ersten Glieder u. s. w. setzt: so erhält man die summirende Reihe jener gegebenen Reihe.

Beispiel. So ist die Reihe der Trigonalzahlen die summirende Reihe der natürlichen Zahlen, und umgekehrt ist, die Reihe der natürlichen Zahlen, die Differenzreihe der Trigonalzahlen.

14. Lehrsatz. Die summirende Reihe einer arithmetischen Progression der r^{ten} Ordnung ist eine arithmetische Progression der $(r+1)^{ten}$ Ordnung. —

Beweis. Das erste Glied der summirenden Reihe ist gleich dem ersten Gliede der gegebnen; das zweite Glied jener ist die Summe der zwei ersten dieser; das dritte Glied jener ist die Summe der drei ersten Glieder dieser. Offenbar ist also die gegebene Reihe die erste Differenzreihe der summirenden Reihe, und da jene von der r^{ten} Ordnung war, so ist diese von der $(r+1)^{ten}$ Ordnung, nämlich um eine Ordnung höher als ihre Differenzreihe.

15. Die figurirten Zahlen sind Progressionen der verschiedenen Ordnungen, die alle darin übereinstimmen, daſs man beim Aufsuchen der nach einander folgenden Differenzreihen endlich auf die Reihe der natürlichen Zahlen kömmt. Bei andern arithmetischen Progressionen kömmt man zwar, wenn man die Differenzreihen nach einander sucht, allemal auch auf eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung und dann auf eine aus lauter gleichen Zahlen bestehende Reihe; aber jene braucht nicht nothwendig die Reihe der natürlichen Zahlen zu seyn, und folglich die letztere nicht aus 1; 1; 1; zu bestehen. Dieſs zeigen schon die Beispiele §. 10.

16. Bemerkung. Es ist bekannt, daſs eine arithmetische Progression der ersten Ordnung ganz allgemein durch a; $a+d$; $a+2d$; $a+3d$; $a+4d$; und so weiter dargestellt wird, indem mit dem ersten Gliede und der immer gleichen Differenz die Reihe ganz bestimmt ist.

17. Aufgabe. Das n^{te} Glied der summirenden Reihe einer arithmetischen Progression der ersten Ordnung zu finden.

Auflösung. Für die Progression a; $a+d$; $a+2d$; $a+3d$; und so weiter ist das n^{te} Glied der summirenden Reihe

$$= n.a + \frac{n.(n-1)}{1 \cdot 2} d.$$

Beweis. Man erhält das n^{te} Glied der summirenden Reihe, wenn man n Glieder jener Reihe addirt. Da nun in jedem Gliede a vorkömmt: so gibt das n.a; und da d vorkömmt einmal, zweimal, dreimal und so fort bis $(n-1)$mal genommen, so kömmt d vor, multiplicirt mit der Summe der $(n-1)$ ersten natürlichen Zahlen, das ist mit der $(n-1)^{ten}$ Trigonalzahl, die $= \frac{(n-1).n}{1 \cdot 2}$ ist.

Die summirende Reihe jener Progression fängt also mit folgenden Gliedern an: a; $2a+d$; $3a+3d$; $4a+6d$; $5a+10d$; $6a+15d$; u. s. w.

18. Bemerkung. Die eben gefundene summirende Reihe gibt schon ein sehr allgemein ausgedrücktes Beispiel von einer Progression der zweiten Ordnung; aber doch noch nicht den allgemeinsten Ausdruck für eine solche Reihe. Die erste Differenzreihe bleibt nämlich dieselbe, wenn man auch jedes Glied der eben gefundenen summirenden Reihe um b vergrößert, und

$$b;\ b+a;\ b+2a+d;\ b+3a+3d;\ b+4a+6d;$$
$$b+5a+10d;\ b+6a+15d;$$

u. s. w. ist der allgemeinste Ausdruck für eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung, indem hier das erste Glied $= b$ ein willkürliches ist, und die erste Differenzreihe

$$a;\ a+d;\ a+2d;\ a+3d \text{ u. s. w.}$$

alle Reihen der ersten Ordnung umfaſst.

Das n^{te} Glied jenes allgemeinen Ausdrucks einer Progression der zweiten Ordnung ist

$$= b + (n-1)a + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d,$$ weil nämlich a zum ersten Male im 2ten, d zum ersten Male im dritten Gliede vorkömmt.

19. Zur Bestimmung einer Progression der zweiten Ordnung müssen also drei Gröfsen gegeben seyn. Sind drei auf einander folgende Glieder gegeben: so sieht man diese als die drei ersten an, und ihre Differenzen geben die Werthe von a und a+d; die Differenz dieser Differenzen gibt d, und damit ist die ganze Reihe bestimmt.

Beispiel. Die ersten drei Glieder mögen 1 . 4 . 8. seyn: so ist $b=1$; $b+a=4$; $b+2a+d=8$; also $a=3$; $a+d=4$; $d=1$, und unsre Reihe ist:

1; 4; 8; 13; 19; 26; 34; 43.

deren erste Differenzen eine gewöhnliche arithmetische Reihe 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; bilden. Die zweite Differenzreihe ist 1; 1; 1; 1; 1.

20. Sind nicht drei auf einander folgende Glieder gegeben, so reichen auch jede drei andre zur Bestimmung hin.

Beispiel. Es sey das zweite Glied $=2$; das 5te $=23$; das 10te $=178$: so gäbe die Vergleichung mit dem allgemeinen Werthe dieser Glieder in §. 18.

$$2=b+a;$$
$$23=b+4a+6d;$$
$$178=b+9a+36d;$$

woraus man leicht $b=7$; $a=-5$; $d=6$ findet. Man schreibt jetzt am besten diese ersten Glieder der gesuchten Reihe, und der ersten und zweiten Differenzreihe hin; macht nun aus der Summe der ersten Glieder beider Differenzreihen $=-5+6$, das zweite Glied der ersten Differenzreihe $=+1$, und aus dem ersten der ersten Differenzreihe und dem ersten Gliede der gesuchten Reihe ihr zweites Glied $=7-5$; und eben so bestimmt man die folgenden Glieder der ersten Differenzreihe und der gesuchten Reihe selbst.

Gesuchte Reihe.	Erste Differ.	Zweite Differ.
7		
	−5	
		6
2		
	+1	
		6
3		
	7	
		6
10		
	13	
		6
23		
	19	
		6
42		
	25	
		6
67		
	31	
		6
98		
	37	
		6
135		
	43	
		6
178		
	49	
227		

21. **Aufgabe.** Die summirende Reihe einer Progression der zweiten Ordnung zu finden.

Auflösung. Wenn diese Reihe die Form b; $b+a$; $b+2a+d$ u. s. w. hat, also ihr n^{tes} Glied

$$=b+(n-1)a+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}d$$

ist: so wird in ihrer summirenden Reihe das n^{te} Glied

$$=n.b+\frac{n.(n-1)}{1.2}a+\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}d.$$

Beweis. b kömmt in jedem Gliede 1 Mal, also in n Gliedern, deren Summe in dem n^{ten} der summirenden Reihe vereinigt ist, n Mal vor. a kömmt im 2ten Gliede 1 Mal, im dritten 2 Mal u. s. fort, also überhaupt so oft vor als die Summe der $(n-1)$ ersten natürlichen Zahlen oder als die $(n-1)^{te}$ figurirte Zahl der zweiten Ordnung angibt, das ist (nach §. 7) $\frac{n.(n-1)}{1.2}$ Mal. Die Coefficienten, mit welchen d im dritten und in den folgenden Gliedern vorkömmt, sind die $(n-2)$ ersten Trigonalzahlen, deren Summe die $(n-2)^{te}$ figurirte Zahl der dritten Ordnung $=\frac{(n-2)(n-1).n}{1.2.3}$ (nach (§. 8.) angibt. Also erhellt die Richtigkeit der Summe.

22. **Lehrsatz.** Wenn man Zahlen f, $f+g$, $f+2g$ u. s. w., die eine arithmetische Progression der ersten Ordnung bilden, zur zweiten Potenz erhebt: so bilden diese Quadratzahlen eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung.

Beweis. Nimmt man drei auf einander folgende Glieder aus der Reihe der Quadrate, zum Beispiel

$$(f+ng)^2=f^2+2fng+n^2g^2;$$
$$(f+(n+1)g)^2=f^2+2(n+1)fg+(n+1)^2g^2;$$
$$(f+(n+2)g)^2=f^2+2(n+2)fg+(n+2)^2g^2;$$

so sind die Unterschiede der beiden ersten

$$= 2fg + 2ng^2 + g^2,$$

der beiden letzten $= 2fg + 2ng^2 + 3g^2$

und der Unterschied dieser Unterschiede $= 2g^2$. Jene Unterschiede waren Glieder der ersten Differenzreihe, der letztere Unterschied ist ein Glied der zweiten Differenzreihe, und da dieses gar nicht von n abhängt, also gleich bleibt, welche drei auf einander folgende Glieder man auch betrachte: so ist die Reihe unserer Quadrate eine Progression der zweiten Ordnung, in welcher das erste Glied der ersten Differenzreihe $= 2fg + g^2$, eben das ist, was wir allgemein (in §. 21) a nannten; die sämmtlichen Glieder der zweiten Differenzreihe werden $= 2g^2$, als Werth unseres d.

23. Hieraus ließe sich die Summe von n Gliedern jener Quadratenreihe finden; wir wollen indeſs den Werth des n^{ten} Gliedes ihrer summirenden Reihe noch auf einem andern Wege aufsuchen.

24. Aufgabe. Die Summe der n ersten Glieder jener Reihe von Quadratzahlen zu finden.

Auflösung. Sie ist $= g^2 \cdot \frac{n^3}{3} + (2fg - g^2) \cdot \frac{n^2}{2} +$

$$(6f^2 - 6fg + g^2)\,\frac{n}{6}.$$

Beweis. Es sey die Summe unsrer Reihe bis zum n^{ten} Gliede durch $= \alpha n + \beta n^2 + \gamma n^3$ ausgedrückt: so wird, wofern α, β, γ nicht von n abhängen, die Summe der $(n+1)$ ersten Glieder $= \alpha(n+1) + \beta(n+1)^2 + \gamma(n+1)^3$ seyn müssen, indem das allgemeine Glied ja immer auf einerlei Weise vom Index abhängen muſs. Die Summe der $(n+1)$ ersten Glieder besteht aber aus der Summe der n ersten und dem $(n+1)^{ten}$ Gliede; also muſs

$$\alpha n + \beta n^2 + \gamma n^3 + (f + ng)^2 = \alpha(n+1) + \beta(n+1)^2 + \gamma(n+1)^3$$

seyn; also wenn man entwickelt und nach den Potenzen von n ordnet

$$f^2+2fgn+g^2n^2$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)+(2\beta+3\gamma)n+3\gamma n^2.$$

Diese Gleichheit soll gelten für jeden Werth von n und wir setzen deswegen die Glieder gleich, welche gleiche Potenzen von n enthalten

$$\alpha+\beta+\gamma=f^2;$$
$$2\beta+3\gamma=2fg;$$
$$3\gamma=g^2;$$

oder $\gamma=\frac{1}{3}g^2$; $\beta=fg-\frac{3}{2}\gamma=fg-\frac{1}{2}g^2$;

$$\alpha=f^2-fg+\frac{1}{2}g^2-\frac{1}{3}g^2=(f^2-fg+\frac{1}{6}g^2)$$

Diese drei Coefficienten sind also wirklich von n unabhängig und das summirende Glied ist nun richtig gefunden.

25. Um deutlicher zu übersehen, dafs die Gleichung $f^2+2fgn+g^2n^2$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)+(2\beta+3\gamma)n+3\gamma n^2$$
zu jener Bestimmung führe, dient folgende Ueberlegung. Allerdings könnte die Gleichung auf mehr als eine Weise aufgelöst werden, wenn man n nur einen einzigen Werth beilegen dürfte; alsdann reichte bekanntlich diese eine Gleichung nicht hin, um aus ihr die drei Gröfsen α, β, γ zu bestimmen. Aber die Gleichung soll gelten für einen jeden Werth von n, er werde grofs oder klein angenommen. Setzt man $n=0$, so mufs also das erste Glied $f^2=\alpha+\beta+\gamma$ seyn, und wenn das ist, so geht die Gleichung in
$$2fgn+g^2n^2=(2\beta+3\gamma)n+3\gamma n^2$$
oder $2fg+g^2n=(2\beta+3\gamma)+3\gamma n$
über, welche für $n=0$, gibt
$$2fg=2\beta+3\gamma.$$
und dann endlich $g^2=3\gamma$.

Diese Vergleichung zweier Reihen, indem man sie Glied für Glied einander gleich setzt, findet im-

mer Statt, wenn die Reihen gelten sollen für einen jeden Werth der Gröſse, nach deren Potenzen die Reihe geordnet ist. In unsrer Reihe zum Beispiel haben ja die Glieder $3\gamma n^2$ und $g^2 n^2$ einen viel mächtigern Einfluſs bei groſsen Werthen von n, als die nur mit der ersten Potenz von n multiplicirten Glieder $2fgn$, und $(2\beta+3\gamma)n$ haben, und folglich könnte die Gleichheit nicht für alle Werthe von n bestehen, wenn man nicht jene Coefficienten und so auch diese gleich setzte.

Beispiel. Der Gleichung $1+2n+3n^2 = \zeta+\eta n+\vartheta n^2$, könnte allerdings, wenn ich $n=1$ setze, Genüge geschehen durch $\zeta=3$, $\eta=1$, $\vartheta=2$, aber dann würde für $n=2$ unser Werth von $\zeta+\eta n+\vartheta n^2 = 3+1.2+2.4=13$ werden, statt daſs $1+2n+3n^2=1+2.2+3.4=17$ wird, und auf ähnliche Weise würden jene, nur einem Werthe von n entsprechende Werthe von ζ, η, ϑ immer mehr und mehr etwas zu Geringes geben, weil die höhern Potenzen von n nicht oft genug genommen werden. Soll also unsre Vergleichung allgemein gelten, so müssen die Werthe von ζ, η, ϑ auf die angegebne Weise bestimmt werden, und es muſs $\zeta=1$, $\eta=2$, $\vartheta=3$ seyn.

26. Der Beweis der vorigen Auflösung (§. 24.) hätte sich auch daraus herleiten lassen, daſs das $(n+1)^{te}$ Glied vermittelst des n^{ten} und des hinzukommenden $(f+ng)^2$ richtig gefunden wird.

27. Beispiel. Wäre $f=g=1$; so hätte man die Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen.

1; 4; 9; 16; 25; 36;

deren Summen bis zum n^{ten} Gliede, also nach der Auflös. §. 24. wird

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Die 10 ersten Quadratzahlen geben also 385.

28. Bemerkung. Eben die Ueberlegungen, welche wir §. 18. angestellt haben, und die ich hier nicht wiederholen will, zeigen, daſs man den allgemeinsten Ausdruck für eine Progression der dritten Ordnung erhält, wenn man

das erste Glied $= c$,
das zweite $= c + b$,
das dritte $= c + 2b + a$,
das vierte $= c + 3b + 3a + d$,
u. allgemein

$$\text{das } n^{te} \text{ Glied} = c + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} a + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d$$

setzt. Das n^{te} Glied nämlich ist hier gleich c addirt zu dem allgemeinen Gliede der Summe einer Reihe der zweiten Ordnung. Die erste Differenzreihe dieser Progression ist der allgemeinste Ausdruck der Progression der zweiten Ordnung, und indem man allen Gliedern etwas Willkürliches $= c$ zulegt, so umfaſst man alle Reihen der dritten Ordnung.

29. Wenn man die Differenzreihen nach der Ordnung sucht, so ist b das erste Glied der ersten Differenzreihe, a das erste Glied der zweiten Differenzreihe, d das erste Glied und gleich allen Gliedern der dritten Differenzreihe.

Es erhellt nun leicht, wie man aus vier gegebnen Gliedern der Reihe die ganze Reihe bestimmt. Sind es vier auf einander folgende Glieder, so nimmt man zwischen ihnen die Differenzen, sucht die diesen entsprechenden zweiten Differenzen und zwischen diesen die dritte Differenz. Man führt nun die Reihe der zweiten Differenzen als arithmetische Progression der ersten Ordnung fort, legt jedes Glied zu dem vorhergehenden der ersten Differenzreihe, um diese erste fortzuführen, und legt diese Glieder der ersten Differenzreihe nach und nach zu den schon gefundenen der verlangten Hauptreihe.

Beispiel. Es mögen 7, 9, 5, 6 die vier ersten Glieder der Reihe seyn: so ist der Anfang der ersten Differenzreihe $+2, -4, +1$,
der zweiten Differenzreihe $-6, +5$,
der dritten Differenzreihe $+11$,

man bildet nun leicht die Reihe, wenn man in der nebenstehenden Tafel zuerst die letzte Differenzreihe, dann die zweite, dann die erste hinschreibt.

Reihe der dritten Ordnung.	Erste Differenzreihe.	Zweite Differenzreihe.	Dritte Differenzreihe.
7	+ 2	− 6	+ 11
9	− 4	+ 5	+ 11
5	+ 1	16	+ 11
6	17	27	11
23	44	38	11
67	82	49	11
149	131	60	11
280	191	71	11
471	262	82	11
733	344	93	11
1077	437	104	
1514	541		
2055			

30. Aufgabe. Die Summe der n ersten Glieder einer arithmetischen Progression der dritten Ordnung zu bestimmen.

Auflösung. Wenn die Buchstaben die Bedeutung wie im §. 28. haben, so ist diese Summe

$$= n.c + \frac{n.(n-1)}{1.2} b + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} a$$

$$+ \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4} d.$$

Beweis. Es kömmt c in jedem Gliede einmal vor, also in der Summe n Mal. b kömmt im zweiten Gliede zuerst, und dann mit den (n − 1) ersten natürlichen Zahlen multiplicirt vor; in der Summe also mit der $(n-1)^{ten}$ figurirten Zahl der zweiten

Ordnung, die Factoren, mit welchen a, welches im dritten Gliede zuerst vorkömmt, multiplicirt ist, sind die (n — 2) ersten Trigonalzahlen, also in der Summe ist a mit der $(n-2)^{ten}$ figurirten Zahl der dritten Ordnung multiplicirt. Endlich hat d, welches in dem vierten Gliede zuerst vorkömmt, die (n — 3) ersten figurirten Zahlen der dritten Ordnung zu Coefficienten, und in der Summe folglich die $(n-3)^{te}$ figurirte Zahl der vierten Ordnung zum Coefficienten, wie es die Formel angibt.

31. Bemerkung. Wenn man die dritten Potenzen der auf einander folgenden Glieder einer gewöhnlichen arithmetischen Progression sucht, so erhält man eine Progression der dritten Ordnung. Denn wenn f, f+g, f+2g die Progression ist, so ist der Unterschied zwischen dem $(n+1)^{ten}$ und dem n^{ten} Gliede der Reihe der dritten Potenzen

$$=(f+ng)^3-(f+(n-1)g)^3=3f^2g+3fg^2(2n-1)+g^3(n^2-3n+1)$$

Dieses ist also das allgemeine Glied der ersten Differenzreihe; und da dieses aus einer Summe von Gliedern besteht, die n^2, die n und die blofs gleich bleibende Gröfse enthalten; da diese Glieder, indem man n die verschiedenen Werthe 1, 2, 3 u. s. w. gibt, Progressionen der zweiten Ordnung und der ersten Ordnung geben, so erhellt, dafs die Summe oder dafs eben jenes allgemeine Glied einer Progression der zweiten Ordnung angehört. Man könnte sich davon auch durch das Aufsuchen der Differenzen von vier auf einander folgenden Glieder überzeugen, wenn man nämlich die zweiten und dritten Differenzen bestimmte, indem man die letztere von n unabhängig finden würde; hier scheint mir jene Andeutung, die in der That einen strengen Beweis enthält, hinreichend.

32. Aufgabe. Die Summe der Cuben der n ersten natürlichen Zahlen zu finden.

Auflösung. Sie ist $=\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^4$.

Beweis. Nehme ich an, diese Summe sey
$$=\alpha+\beta n+\gamma n^2+\delta n^3+\varepsilon n^4+\zeta n^5$$
für $(1+2^3+3^3+4^3+5^3+++n^3)$, so müſste sie
$$=\alpha+\beta(n+1)+\gamma(n+1)^2+\delta(n+1)^3+\varepsilon(n+1)^4+\zeta(n+1)^5$$
werden, wenn man noch das Glied $(n+1)^3$ hinzu nähme. Der Unterschied beider Ausdrücke oder
$$\beta+\gamma(2n+1)+\delta(3n^2+3n+1)+\varepsilon(4n^3+6n^2+4n+1)$$
$$+\zeta(5n^4+10n^3+10n^2+5+1)$$
gäbe also n^3+3n^2+3n+1.
Dieses muſs für jeden Werth von n gelten; es muſs also alles was n, alles was n^2, alles was n^3, alles was n^4 enthält, jedes für sich betrachtet, gleich werden. Da nun n^4 nur in dem einzigen Gliede $5\zeta n^4$ vorkömmt: so muſs $\zeta=0$ seyn, (was sich auch schon aus §. 30. von selbst versteht). Da n^3 bloſs in den beiden Gliedern $4\varepsilon n^3=n^3$, vorkömmt, so ist $\varepsilon=\frac{1}{4}$ und wir erhalten jetzt mit Hülfe dieses Werthes die Glieder welche n^2 enthalten, $3\delta n^2+\frac{3}{2}n^2=3n^2$, also $\delta=\frac{1}{2}$; diese Werthe in das Glied gesetzt, welches n enthält, geben $2\gamma n+\frac{3}{2}n+n=3n$, das ist $\gamma=\frac{1}{4}$, Endlich $\beta+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$, also $\beta=0$. Die angenommene Summe $=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\zeta x^5$ ist also $=a+\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^4$. Hier scheint α unbestimmt zu bleiben; aber da die Summe $=0$ seyn muſs, für $n=0$, so ist $\alpha=0$.

33. Lehrsatz. Wenn von einer arithmetischen Reihe irgend einer n^{ten} Ordnung das p^{te}, das $(p+q)^{te}$,

das $(p+2q)^{te}$, das $(p+3q)^{te}$ Glied und so weiter genommen wird, Glieder nämlich, deren Zeiger in einer gewöhnlichen arithmetischen Progression fortgehen: so bilden diese Glieder allein betrachtet, wieder eine Reihe eben derselben n^{ten} Ordnung, und können als deren erstes, zweites, drittes, viertes Glied u. s. w. angesehen werden.

Beweis. Ich werde hier nur den Beweis einer Progression der dritten Ordnung führen; die Art der Beweisführung wird aber zeigen, daſs sie bei allen höhern Ordnungen, nur mit mehr Weitläuftigkeit, anwendbar sey.

In der §. 28. betrachteten Reihe der dritten Ordnung ist das p^{te} Glied

$$=c+(p-1)b+\frac{(p-1)p-2)}{1\,.\,2}a+\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1\,.\,2\,.\,3}d;$$

das $(p+q)^{te}$ Glied $=$

$$c+(p+q-1)b+\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{1\,.\,2}a$$
$$+\frac{(p+q-1)(p+q-2)(p+q-3)}{1\,.\,2\,.\,3}d;$$

das $(p+2q)^{te}$ Glied $=$

$$c+(p+2q-1)b+\frac{b+(p+2q-1)(p+2q-2)}{1\,.\,2}a$$
$$+\frac{(p+2q-1)(p+2q-2)(p+2q-3)}{1\,.\,2\,.\,3}d;$$

das $(p+3q)^{te}$ Glied $=$

$$c+(p+3q-1)b+\frac{(p+3q-1)(p+3q-2)}{1\,.\,2}a$$
$$+\frac{(p+3q-1)(p+3q-2)(p+3q-3)}{1\,.\,2\,.\,3}d.$$

Nimmt man die Differenzen zwischen diesen Gliedern, so erhält man folgende, gehörig geordnete Differenzen:

$$qb+\left\{\frac{q(2p-3)+q^2}{1\,.\,2}\right\}a$$
$$+\left\{\frac{q(3p^2-12p+11)+q^2(3p-6)+q^3}{1\,.\,2\,.\,3}\right\}d,$$

als erstes Glied;

$$qb+\left\{\frac{q(2p-3)+3q^2}{1\,.\,2}\right\}a$$
$$+\left\{\frac{q(3p^2-12p+11)+q^2(9p-18)+7q^3}{1\,.\,2\,.\,3}\right\}d,$$

als zweites Glied;

$$q.b+\left\{\frac{q(2p-3)+5q^2}{1\,.\,2}\right\}a$$
$$+\left\{\frac{q(3p^2-12p+11)+q^2(15p-30)+19q^3}{1\,.\,2\,.\,3}\right\}d,$$

als drittes Glied der ersten Differenzreihe.

Die Unterschiede zwischen diesen, oder die Glieder der zweiten Differenzreihe werden

$$q^2a+\left\{\frac{q^2(6p-12)+6q^3}{1\,.\,2\,.\,3}\right\}d;$$

und $$q^2a+\left\{\frac{q^2(6p-12)+12q^3}{1\,.\,2\,.\,3}\right\}d.$$

Endlich das erste Glied der dritten Differenzreihe

$$=q^3d;$$

dieses hängt also nur von d und von der Anzahl q der Glieder ab, die zu Bestimmung des Abstands der hier genommenen Glieder von einander dient. Diese dritte Differenz bleibt also auch bei weiterer Fortsezzung der Reihe unveränderlich, da sie gar nicht mehr davon abhängt, ob das p^{te} Glied, das $(p+q)^{te}$ Glied oder irgend ein andres das erste hier betrachtete Glied war.

Der Beweis läſst sich auch allgemein so führen. Da b vorkömmt, als multiplicirt in eine Reihe der,

ersten Ordnung, so kommt b in der zweiten Differenz nie mehr vor, da a in Glieder einer Reihe der zweiten Ordnung multiplicirt ist, so enthält die dritte Differenzreihe kein a mehr; endlich da die Coefficienten von d eine Reihe von der dritten Ordnung bilden, so kömmt d nicht mehr in der vierten Differenz vor. So könnte man offenbar auch für höhere Reihen fortschließen.

34. Erklärung. Eine Reihe interpoliren, oder durch Einschalten vervollständigen, heifst, zwischen den gegebnen Gliedern andre, die dem Gesetze der Reihe entsprechend sind, finden.

Beispiel. In der arithmetischen Progression der ersten Ordnung 5, 9, 13, 17, schaltet man zwei Glieder zwischen jeden auf einander folgenden, gegebenen ein, wenn man die Differenz nur $\frac{1}{3}$ der vorigen setzt; also

$5, 6\frac{1}{3}, 7\frac{2}{3}, 9, 10\frac{1}{3}; 11\frac{2}{3}, 13$ u. s. f. ist die vervollständigte Reihe.

In der Progression der zweiten Ordnung 1, 4, 9, 16 schaltet man drei Glieder zwischen jedem Paare der gegebnen ein, wenn man setzt:

$1, \left(\frac{5}{4}\right)^2, \left(\frac{6}{4}\right)^2, \left(\frac{7}{4}\right)^2, 4$ u. s. w. denn die Differenzen werden hier

$\frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}$ und bilden eine Progression der ersten Ordnung; die durch Einschaltung vervollständigte Reihe ist also, eben so gut als die gegebne, eine Progression der zweiten Ordnung.

35. Aufgabe. Eine Progression der zweiten Ordnung, deren allgemeines $(n+1)^{tes}$ Glied $b+na+\frac{n(n-1)}{1.2}d$ ist, durch Einschaltung von $(p-1)$ Gliedern zwischen jedem Paare der gegebnen zu vervollständigen.

Auflösung. Da die vervollständigte Reihe p Mal so viele Glieder erhält, als die gegebne, so ist dasjenige Glied, welches vorhin das $(n+1)^{te}$ hiefs, jetzt das $(p.n+1)^{te}$ und es wird jetzt das q^{te} Glied gefunden,

$$= b + \frac{(q-1)}{p} a + \frac{\left(\frac{q-1}{p}\right)\left(\frac{q-1}{p} - 1\right)}{1 \cdot 2} d$$

Beispiel. In der Reihe 49, 64, 81, sollen 5 Glieder zwischen jedem Paare eingeschaltet werden, also $p - 1 = 5$, $b = 49$, $a = 15$, $d = 2$. Sucht man nun in der neuen Reihe in welcher 64 das siebente Glied ist), das 10te Glied, so ist $q = 10$, und dieses Glied

$$= 49 + \frac{9}{6}\, 15 + \frac{\frac{9}{6} \cdot \frac{3}{6}}{2} \cdot 2 = \frac{2601}{36} = \left(\frac{51}{6}\right)^2.$$

und die Reihe ist

$$49, \left(\frac{43}{6}\right)^2, \left(\frac{44}{6}\right)^2, \left(\frac{45}{6}\right)^2, \left(\frac{46}{6}\right)^2, \left(\frac{47}{6}\right)^2,$$

$$64, \left(\frac{49}{6}\right)^2, \left(\frac{50}{6}\right)^2, \left(\frac{51}{6}\right)^2.$$

Beweis. Daſs zuerst die nach der Regel, welche die Auflösung angibt, gefundene Reihe, wieder eine Progression der zweiten Ordnung ist, erhellt leicht, da ihre erste Differenzreihe, wenn man die Unterschiede zwischen den Gliedern, deren Zeiger

$$q,\ (q+1),\ (q+2)$$

sind, nimmt, eine Progression der ersten Ordnung ist. Das q^{te} Glied soll nämlich seyn,

$$= b + \frac{(q-1)}{p} a + \frac{(q-1)}{p}\left(\frac{q-1}{p} - 1\right)\frac{d}{2};$$

das $(q+1)^{te} = b + \frac{q}{p} a + \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p} - 1\right)\frac{d}{2};$

das $(q+2)^{te} = b + \frac{(q+1)}{p} a + \frac{(q+1)}{p}\left(\frac{(q+1)}{p} - 1\right)\frac{d}{2}.$

Die Differenzen sind

$$= \frac{a}{p} + \left(\frac{2q-1}{p^2} - \frac{1}{p}\right)\frac{d}{2};$$

$$\text{und} = \frac{a}{p} + \left(\frac{2q+1}{p^2} - \frac{1}{p}\right)\frac{d}{2}.$$

deren Unterschied, als Glied der zweiten Differenzreihe $=\frac{d}{p^2}$ ist. Dieses ist von q unabhängig, also immer gleich, welchen Werth auch q habe.

Auch das zweite, was bewiesen werden muſs, daſs nämlich die gegebnen Glieder so vorkommen, daſs das dortige erste auch jetzt das erste, das dortige zweite jetzt das $(p+1)^{te}$, das dortige dritte jetzt das $(2p+1)^{te}$, das dortige $(n+1)^{te}$ jetzt das $(np+1)^{te}$ wird, ist richtig.

Sucht man nämlich nach der Formel der Auflösung das $(np+1)^{te}$ Glied, so daſs statt q jetzt $(np+1)$ gesetzt wird, so findet man $b+na+\frac{n.(n-1)}{1.2}d$, und dieses ist der Werth des $(n+1)^{ten}$ Gliedes in der gegebnen und folglich des $(np+1)^{ten}$ Gliedes in der vervollständigten Reihe, wie es seyn muſs.

36. Aufgabe. In der arithmet. Progression irgend einer höhern r^{ten} Ordnung, deren $(n+1)^{tes}$ Glied durch

$$\alpha+n.\beta+\frac{n.(n-1)}{1.2}\gamma+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\delta$$
$$+\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\varepsilon+\text{u.s.f.}$$

ausgedrückt ist, die einzuschaltenden Glieder zu finden, wenn zwischen jedem Paare von Gliedern $(p-1)$ eingeschaltete Glieder Platz finden sollen.

Auflösung. Das q^{te} Glied der vervollständigten Reihe ist

$$=\alpha+\left(\frac{q-1}{p}\right)\beta+\left(\frac{q-1}{p}\right)\left(\frac{q-1}{p}-1\right)\frac{\gamma}{1.2}$$
$$+\left(\frac{q-1}{p}\right)\left(\left(\frac{q-1}{p}\right)-1\right)\left(\left(\frac{q-1}{p}\right)-2\right)\frac{\delta}{1.2.3}$$
$$+\left(\frac{q-1}{p}\right)\left(\left(\frac{q-1}{p}\right)-1\right)\left(\left(\frac{q-1}{p}\right)-2\right)$$
$$\left(\left(\frac{q-1}{p}\right)-3\right)\frac{\varepsilon}{1.2.3.4}+\text{u.s.f.}$$

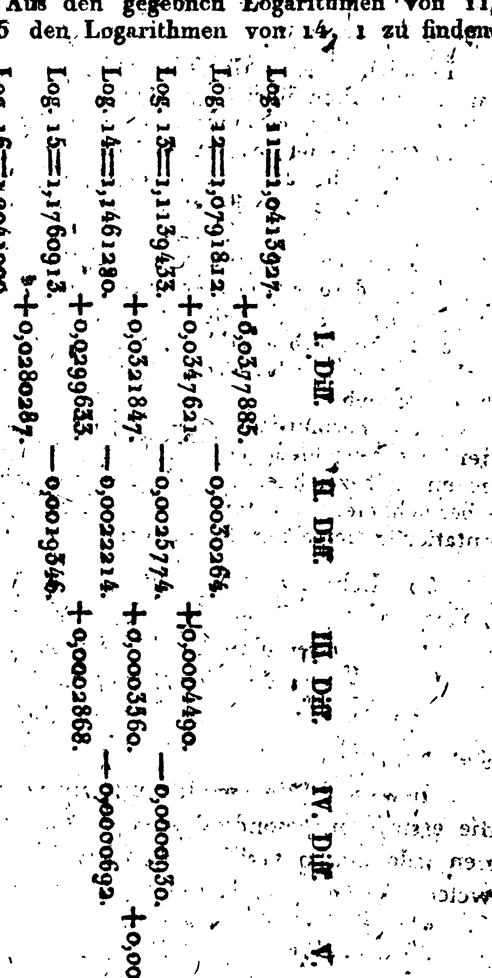
Beweis. Es erhellt erstlich, dafs diese Reihe, wenn ihr allgemeines Glied dem allgemeinen Gliede der gegebnen Reihe entsprechend, wie es die r^{te} Ordnung fordert, fortgeführt wird, eine Progression derselben Ordnung ist; aber auch zweitens stimmt das erste Glied der gegebnen mit dem ersten Gliede der vervollständigten, das zweite Glied jener mit dem $(p+1)^{ten}$ dieser, das dritte Glied jener mit dem $(2p+1)^{ten}$ dieser, und allgemein das $(n+1)^{te}$ Glied jener mit dem $(np+1)^{ten}$ dieser genau überein, so wie es den Forderungen der Einschaltung gemäfs ist.

37. Bemerkung. Wenn man also nur so viele Glieder der Progression kennt, als zu ihrer genauen Kenntnifs erfordert werden, das ist, so viele als zu Bestimmung der Differenzen bis zu der Differenzreihe hin, in welcher alle Glieder gleich werden, nöthig ist: so hat das Einschalten keine Schwierigkeit. In den Bezeichnungen der letzten Aufgabe ist α das erste gegebne Glied der Reihe selbst; β das erste Glied der ersten Differenzreihe zwischen den gegebnen Gliedern; γ das erste Glied der zweiten, δ das erste Glied der dritten Differenzreihe, die man aus den gegebnen Gliedern findet, und so die übrigen Buchstaben die Anfangsglieder der folgenden Differenzreihen. Diese alle sind also gegebne Gröfsen, wenn so viele Glieder gegeben sind, als die Ordnung fordert, zu welcher die Progression gehört.

38. Bemerkung. Man kann diese Interpolationen oft auch da anwenden, wo die gegebnen Gröfsen nicht mit völliger Strenge als einer arithmetischen Progression höherer Ordnung angehörend, dürfen angesehen werden. Die Logarithmen zum Beispiel gehen nicht nach einer solchen Progression fort; aber sie entsprechen genauer einer Progression der zweiten als der ersten Ordnung, besser einer Progression der dritten als der zweiten Ordnung u. s. w. und man

kann die zwischen einzuschaltenden Logarithmen desto genauer finden, je mehrere Logarithmen man als Glieder einer Progression von höherer Ordnung zu Hülfe nimmt.

Beispiel. Aus den gegebnen Logarithmen von 11, 12, 13, 14, 15 den Logarithmen von 14, 1 zu finden.



	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	IV. Diff.	V. Diff.
Log. 11 = 1,0413927.	+0,0377885.	−0,0030264.	+0,0004490.	−0,0000930.	+0,0000238.
Log. 12 = 1,0791812.	+0,0347621.	−0,0025774.	+0,0003560.	−0,0000692.	
Log. 13 = 1,1139433.	+0,0321847.	−0,0022214.	+0,0002868.		
Log. 14 = 1,1461280.	+0,0299633.	−0,0019346.			
Log. 15 = 1,1760913.	+0,0280287.				
Log. 16 = 1,2041200.					

Wollte man hier die Logarithmen als eine Progression der ersten Ordnung ansehen, so würde man sich begnügen

$$\left.\begin{matrix} \alpha + \frac{(q-1)}{p}\beta_1 \text{ das ist } 1{,}0413927 \\ + \frac{31}{10} \cdot 0{,}0377885 = 0{,}1171443 \end{matrix}\right\}$$

also $= 1{,}1585370$ zu setzen.

Aber Log. 14,1 ist $= 1{,}1492191$.

Dies wäre oft allzu sehr von der Wahrheit entfernt, da die Logarithmen hier weit vor einer gewöhnlichen arithmetischen Reihe abweichen.

Nimmt man noch das dritte Glied

$$\left(\frac{q-1}{p}\right)\left(\left(\frac{q-1}{p}\right)-1\right)\frac{\gamma}{2}$$

$$= \frac{31}{10}\cdot\left(\frac{31}{10}-1\right)\left(\frac{-0{,}0030264}{2}\right)$$

$$= -0{,}0098509$$

zu dem Vorigen $= 1{,}1585370$

so erhielte man $= 1{,}1486861$.

Das vierte Glied $=$

$$\left(\frac{q-1}{p}\right)\left(\left(\frac{q-1}{p}\right)-1\right)\left(\left(\frac{q-1}{p}\right)-2\right)\frac{\delta}{6}$$

$$= (3{,}1)(2{,}1)(1{,}1)\left(\frac{+0{,}0004490}{6}\right)$$

$$= +0{,}0005359$$

zu dem Vorigen $= 1{,}1486861$

gibt $= 1{,}1492220$.

Das fünfte Glied ist $=$

$$= (3{,}1)(2{,}1)(1{,}1)(0{,}1)\cdot\left(\frac{-0{,}0000930}{24}\right)$$

$$= -0{,}0000027$$

zum Vorigen $= 1{,}1492220$

gibt $= 1{,}1492193$

Endlich das sechste Glied

$$= (3{,}1)(2{,}1)(1{,}1)(0{,}1)(-0{,}9)\left(\frac{+0{,}0000238}{120}\right)$$

$$= -0{,}0000001.$$

Unser Logarithme wird also als Interpolationsglied einer Reihe der 5ten Ordnung angesehen $= 1,1492192$, welches schon fast genau mit den Tafeln zusammen trifft.

Hätte man mit Hülfe gröſserer Tafeln, wo die Logarithmen bis auf zehn Decimalstellen berechnet sind, den Logarithmen von 14,1 durch Interpolation bis zur zehnten Stelle genau finden wollen: so hätte man die Logarithmen als eine Reihe von noch höherer Ordnung ansehen müssen.

39. Anmerkung. Ganz auf dieselbe Art verfährt man immer, wo man aus mehrern gegebnen Gröſsen die zwischen liegenden regelmäſsig einzuschalten wünscht. Hat man nur zwei Bestimmungen (z. B. zwei Beobachtungen eines Himmelskörpers), so kann man die Progression nur als eine der ersten Ordnung ansehen, obgleich man sehr oft diese Voraussetzung als unrichtig anerkennt. Hat man drei Bestimmungen, so werden die Einschaltungen schon genauer, indem die Reihe als eine der zweiten Ordnung angesehen wird. Und so erhält man aus mehrern Beobachtungen oder Bestimmungen, das Gesetz des Fortgangs immer genauer.

Lägen die gegebnen Glieder nicht gleich weit aus einander, so könnte man sich durch ähnliche Betrachtungen dennoch helfen. Hätte man z. B. den Ort eines Himmelskörpers nach Zwischenzeiten von 12, von 17, von 49, von 13 Stunden beobachtet, so könnte man die Orte als das 1te, 13te, 30te, 49te, 62te, Glied einer Reihe der vierten Ordnung ansehen, und darnach, wenn es erforderlich wäre, für alle Stunden den Ort berechnen, der desto genauer wäre, je weniger die wahre Folge der Zahlen von einer Reihe der vierten Ordnung abwiche.

40. Bemerkung. Die Betrachtung im §. 31. läſst leicht übersehen, daſs ein Ausdruck wie

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

wenn man darin für x Werthe, die in einer gewöhnlichen arithmetischen Progression fortgehen, setzt, eine Progression derjenigen Ordnung gibt, welche durch die höchste Potenz von x angegeben wird. ax^5 nämlich gibt, wenn man darin für x jene Werthe setzt, eine arithmetische Reihe der fünften Ordnung, die folgenden Glieder geben Reihen niedrigerer Ordnun-

gen; es erhellt also, daſs die Summe aller Glieder eine Reihe der 5ten Ordnung gibt. Setzt man nämlich statt x nach und nach x, $x+1$, $x+2$ u. s. w. so fällt schon in der ersten Differenzreihe das Glied ex, in der zweiten Differenzreihe das Glied dx^2 weg u. s. w.; in jeder Differenzreihe wird die Potenz von x um 1 herabgesetzt, und die fünfte Differenzreihe ist von x unabhängig.

Da man in bestimmten Gleichungen die ganzen Zahlen, zwischen welchen die Wurzeln liegen, oft durch Bestimmung der Werthe, welche die Summe aller Glieder gibt, wenn man x nach und nach $=0$, $=1$ u. s. w. setzt, finden muſs: so geben die Differenzreihen ein Mittel den Werth der Summe leicht für mehrere Werthe von x zu finden, wenn man ihn für einige kennt.

Beispiel. Es sey

$$x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 2x - 24 = y,$$

so findet man leicht y für $x=0$, $x=-1$, $x=-2$, $x=+1$, $x=+2$, und wenn man daraus die Differenzen sucht, so erhält man dadurch die in der folgenden Tafel durch $\{\quad\}$ bezeichneten Glieder. Die Fortführung der Differenzreihen, wie im §. 29. gibt dann die übrigen sowohl vorhergehenden als nachfolgenden, und man sieht, daſs -4 und $+6$ Wurzeln der Gleichung sind.

Werthe von x	Zugehörige Werthe von u.	Erste Diff.	Zweite Diff.	Dritte Diff.	Vierte Diff.
— 6	+ 888		+ 460		+ 24
		— 602		— 144	
— 5	+ 286		+ 316		+ 24
		— 286		— 120	
— 4	0		+ 196		+ 24
		— 90		— 96	
— 3	— 90		+ 100		+ 24
		+ 10		— 72	
— 2	— 80		+ 28		+ 24
		+ 38		— 48	
— 1	— 42		— 20		+ 24
		+ 18		— 24	
0	— 24		— 44		+ 24
		— 26		0	
+ 1	— 50		— 44		+ 24
		— 70		+ 24	
+ 2	— 120		— 20		+ 24
		— 90		+ 48	
+ 3	— 210		+ 28		+ 24
		— 62		+ 72	
+ 4	— 272		+ 100		+ 24
		+ 38		+ 96	
+ 5	— 234		+ 196		+ 24
		+ 234		+ 120	
+ 6	0		+ 316		+ 24
		+ 550		+ 144	
+ 7	+ 550		+ 460		+ 24

Dritter Abschnitt.

Von den Permutationen.

41. Erklärung. Wenn irgend eine Anzahl verschiedener Gröſsen a, b, c, d, e gegeben ist: so besteht das Permutiren darin, daſs man diese Gröſsen in einer andern Folge aufstellt. Jede solche neue Stellung der Gröſsen gibt eine neue Permutationsform.

Beispiel. a b c d e, a e c b d, a d e c b, sind verschiedene Permutationsformen jener fünf Gröſsen.

42. Es soll hier bestimmt werden, theils, wie viele solche Versetzungen für gegebne Gröſsen möglich sind, theils wie man sie alle gut geordnet darstellen kann.

43. Lehrsatz. Wenn n Gröſsen, alle von einander verschieden, gegeben sind: so ist die Anzahl aller

aus ihnen zu bildenden Permutationsformen gleich dem Producte aller natürlichen Zahlen von 1 bis n, diese letztere mit eingeschlossen.

Beweis. Wenn man eine Gröſse a hat: so läſst sich die zweite b mit ihr so zusammen stellen, daſs diese entweder jener folgt oder ihr vorangeht, a b, b a; für zwei Gröſsen gibt es also zwei Permutationsformen. Nimmt man zu ihnen noch eine dritte c, so kann diese in jeder jener beiden Formen den letzten Platz nach a und b, oder den Platz zwischen beiden, oder den Platz vor beiden einnehmen. Es gibt also dreimal zwei Permutationsformen

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Kömmt eine vierte Gröſse, d hinzu, so gibt es für sie in jeder dieser Formen vier Plätze, die man ihr anweisen kann; jede jeder sechs Formen gibt also nun vier, alle also 4 . 3 . 2 Permutationsformen. Da nun jede dieser 24 Formen einer fünften Gröſse e fünf verschiedene Plätze, nämlich vor allen, vor der zweiten, vor der dritten, vor der vierten, nach der vierten darbietet: so ergibt die Hinzufügung der fünften Gröſse 5.4.3.2.1 Permutationsformen; und es erhellt leicht, daſs man so fortschlieſsen kann, und für n Gröſsen 1.2.3.4....n Permutationsformen finden wird.

44. Lehrsatz. Ist zwar die Anzahl der zu permutirenden Gröſsen noch immer $= n$, aber sind sie nicht alle verschieden, sondern einige einander gleich: so findet man die Anzahl der möglichen Permutationsformen, wenn man das Product 1.2.3.4....n, worin alle ganze Zahlen von 1 bis n als Factoren vorkommen, durch die Anzahl derjenigen Permutationsformen dividirt, welche die unter sich gleichen Gröſsen erlauben würden, wenn sie ungleich wären.

Beweis. 1. Wären unter den vorhin betrachteten Gröſsen die Gröſsen a und b gleich: so ist die Permutationsform b a nicht mehr von a b verschieden, indem

beide in a a übergegangen sind; also sind nun die sämmtlichen Permutationsformen, in welche blofs a, b ihre Plätze vertauscht hatten, ganz gleich, zum Beispiel acabd und bcoad, sind beide acead geworden, und die Anzahl der Permutationsformen ist nur halb so grofs, als vorhin $= \frac{1.2.3.....n}{1.2}$ wo 1 . 2 die Anzahl der Permutationen für zwei Gröfsen anzeigt.

Wären drei Gröfsen gleich, a=b=c: so gäben die sechs aus ihnen sonst hervorgehenden Formen jetzt nur eine; und statt das vorhin adebcf, adecbf, bdeacf, bdecaf, cdeabf, cdebaf verschieden waren, gehen sie jetzt alle in adeaaf über. Dies gilt für alle ähnliche, und wir haben also nur $\frac{1.2.3.4....n}{1.2.3}$ Permutationsformen. Dieselben Betrachtungen zeigen, dafs, wenn m gleiche Gröfse unter den n Gröfsen sind, die sämmtlichen sonst unter jenen m Gröfsen möglichen Permutationen in eine zusammen fallen, also n Gröfsen, unter denen m gleiche, nur $\frac{1.2.3.4......n}{1.2.3...m}$ Permutationen erlauben.

2. Gäbe es aufser jenen m gleichen Gröfsen, noch andre wiederum unter sich gleiche Gröfsen, so würde ihrentwegen die Anzahl der Permutationsformen abermals vermindert. Gesetzt unter den n Gröfsen komme a m Mal vor, so würden, wenn alle (n—m) übrigen Gröfsen ungleich sind, $\frac{1.2.3.4.5....n}{1.2.3....m}$ Permutationen möglich seyn. Kömmt aber zu gleicher Zeit die Gröfse f p Mal vor: so fallen deshalb wieder diejenigen Permutationen in eine zusammen, die verschieden gewesen wären, wenn jede dieser Gröfsen (deren Anzahl = p) eine von f verschiedenen Werth gehabt hätte, das heifst eine Anzahl von 1.2.3...p Permutationsformen gibt jetzt

immer nur eine einzige; und die Anzahl der noch als wirklich verschieden vorkommenden Permutationsformen ist

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots n}{1 \cdot 2 \ldots m \, 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p},$$

3. Und so läſst sich der Beweis fortführen, wenn noch eine dritte Reihe gleicher Gröſsen vorhanden ist.

Man dividirt also die Zahl $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, welche gelten würde, wenn alle n Gröſsen ungleich wären, mit der Anzahl der Permutationsformen, welche der Menge der ersten unter sich gleichen Gröſsen entsprechen würde, dann mit der Anzahl der Permutationsformen, welche der Menge der zweiten unter sich gleichen Gröſsen entspräche u. s. w.

Beispiel. Unter 12 Gröſsen sind 5 gleiche $= a$, 3 andre gleiche $= b$, 3 wiederum gleiche $= c$, und dann noch die Gröſse d; wie viele Permutationsformen gibt es? So viele als $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}$ angibt, das ist 110880.

45. Ein vorzüglich merkwürdiger Fall ist der, wo nur zwei verschiedene, immer wiederholt gesetzte Gröſsen vorkommen, wo also unter den n Gröſsen, m gleiche und (n—m) wiederum gleiche sind. Dann ist die Anzahl der Permutationsformen

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots\ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-m)}$$

Da hier der Zähler die Gröſsen $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-m)$ sämmtlich als Factoren enthält, und dann noch die folgenden $(n-m)+1$; $(n-m)+2$ u. s. w. bis n; so ist jene Anzahl

$$= \frac{(n-m+1) \cdot (n-m+2) \ldots\ldots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m}$$

$$\text{oder} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots\ldots (n-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m},$$

Hätte man dagegen die Factoren $1.2.3....m$ im Zähler und Nenner weggelassen, so wäre eben jene Anzahl

$$=\frac{n.(n-1).(n-2)......(m+1)}{1.2..3.......(n-m)}$$

geworden.

46. Der erstere jener Ausdrücke gibt, wenn $m=2$ ist, $\frac{n.(n-1)}{1..2.}$, die $(n-1)^{te}$ Trigonalzahl; wenn $m=3$ ist, oder 3 gleiche und andre $(n-3)$ gleiche Gröſsen vorkommen, $\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, die $(n-2)^{te}$ figurirte Zahl der dritten Ordnung. Allgemeiner aber ist

$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n.3).....(n-(m-1))}{1.2:3.4.......m}$$

die $(n-(m-1))^{te}$ figurirte Zahl der m^{ten} Ordnung. (§. 7. 8. 9.)

47. Bemerkung. Um die verschiedenen Permutationsformen, deren Anzahl nun bestimmt ist, auch wirklich darzustellen, ist es am bequemsten, sich die einzelnen Gröſsen, als nach ihrem Werthe geordnet zu denken. Am bequemsten geschieht dies bei Zahlen, denen wir, sowohl wenn jede Ziffer einzeln betrachtet wird, als auch wenn wir die Stelle, wo sie steht, berücksichtigen, einen bestimmten Werth beilegen. Wir nennen die Stelle, in welcher die 4 in 4321 steht, die höchste Stelle und sagen 4321 sei die gröſste Zahl, die sich mit jenen Ziffern schreiben läſst. Die sämmtlichen Versetzungen finden sich daher am leichtesten in Beziehung auf Zahlen, wenn man von der gröſsten zu immer kleinern, die durch en die Ziffern dargestellt werden, fortgeht.

48. Aufgabe. Alle Zahlen nach der Ordnung anzugeben, welche sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bilden lassen.

Auflösung. 1. Man erhält die höchste derselben, wenn man die gröfste jener fünf Zahlen in die höchste Stelle setzt und nun die kleinern nach der Ordnung ihrer Gröfse folgen läfst, 5 4 3 2 1.

2. Man findet die nächst kleinere Zahl, wenn in die niedrigste Stelle die Ziffer, welche der 1 am nächsten kömmt, setzt, also die 1 und 2 vertauscht, nämlich 5 4 3 1 2.

3. Aber auch aus jeder gegebnen Form, zum Beispiel 3 5 4 1 2, findet man die nächst niedrigere, wenn man die niedrigste Stelle (hier die dritte) aufsucht, in welcher aus den ihr nachfolgenden Ziffern etwas Kleineres kann gesetzt werden; diese Stelle besetzt man mit derjenigen Ziffer, welche unter den nachfolgenden, der aus diesem Platze verdrängten am nächsten kömmt; man läfst die höhern Stellen ungeändert, ordnet aber in den niedrigern Plätzen so, dafs die gröfsern Ziffern voranstehen.

In der Zahl 3 5 4 1 2 kann nicht die 1, wohl aber die 4 durch eine ihr folgende kleinere ersetzt werden; man behält also 3, 5, in den beiden höchsten Stellen, setzt statt der 4, die 2, und ordnet 4, 1 so, dafs 4 voransteht; also 3 5 2 4 1 ist die nächst kleinere, auf 3 5 4 1 2 folgende Form.

49. Bemerkung. Die Regeln, die sich nach diesem einzelnen Beispiele leicht ganz allgemein übersehen lassen, können darauf zurückgeführt werden, dafs man zuerst die zwei letzten, die drei letzten, die vier lezten u. s. w. in gehöriger Ordnung permutirt. So erhält man alle Formen die mit Beibehaltung der unveränderten höchsten möglich sind. Ist man nun so bis an die höchste gekommen: so setzt man die nächst niedrigere in die höchste Stelle und ordnet die übrigen so, dafs unter ihnen immer die höhern vorange-

hen, und wiederholt nach den vorigen Regeln die Versetzungen.

Beispiel. Die sämmtlichen nach ihrer Größe geordneten Zahlen, die mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 geschrieben werden:

54321	45321	35421	25431	15432
54312	45312	35412	25413	15423
54231	45231	35241	25341	15342
54213	45213	35214	25314	15324
54132	45132	35142	25143	15243
54123	45123	35124	25134	15234
53421	43521	34521	24531	14532
53412	43512	34512	24513	14523
53241	43251	34251	24351	14352
53214	43215	34215	24315	14325
53142	43152	34152	24153	14253
53124	43125	34125	24135	14235
52431	42531	32541	23541	13542
52413	42513	32514	23514	13524
52341	42351	32451	23451	13452
52314	42315	32415	23415	13425
52143	42153	32154	23154	13254
52134	42135	32145	23145	13245
51432	41532	31542	21543	12543
51423	41523	31524	21534	12534
51342	41352	31452	21453	12453
51324	41325	31425	21435	12435
51243	41253	31254	21354	12354
51234	41235	31245	21345	12345

Hier behalten die zwei und zwei zusammen geschlossenen dieselben Zehntausender, Tausender und Hunderter, die sechs und sechs zusammen geschlossenen behalten einerlei Zehntausender und Tausender; die vier und zwanzig zusammen geschlossenen haben einerlei Zehntausender, und so gehören allemal zwei als durch Permutation der 2 letzten; so gehören 6 als durch Permutation der 3 letzten, 24 als durch Permutation der 4 letzten, 120 als durch Permutation der 5 letzten u. s. w. zusammen.

50. Für Buchstaben gilt eben die Regel, und man kann am besten sich auch hier eine ähnliche Rangordnung, wie bei den Zahlen denken.

Beispiel. Die richtig geordneten Permutationsformen von 4 Grössen.

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba.

51. Die Regeln §. 48. finden noch eben so Statt, wenn auch gleiche Grössen vorkommen. Um nämlich zu einer gegebnen Form die nächst niedrigere zu finden, sucht man die niedrigste Stelle auf, die aus dem Nachfolgenden mit etwas Kleinerm kann besetzt werden, läfst die höhere Stelle ungeändert, setzt in jene Stelle diejenige der folgenden, welche der verdrängten am nächsten ist, und ordnet die übrigen Grössen in den folgenden Stellen so, dafs die grösseren voranstehen.

Beispiel. An 541131442 schliesst sich
541131424
und daran 541131244,
541124431
541124413
541124341 u. s. w.

Auf ähnliche Art bei Buchstaben, wenn wir die Ordnung des Alphabets als ihre natürliche Folge angebend ansehen, und

aabccddde die erste nennen, schliesst
sich an die Form cabcdaedd, als die nächste
cabcddade
cabcddaed u. s. w. an;
oder an cabedddca
schliesst sich cacabddde
cacabdded
cacabdedd
cacabeddd
cacadbdde u. s. w.

Vierter Abschnitt.

Von den Combinationen.

52. Erklärung. Wenn mehrere von einander verschiedene Größen a, b, c, d, e gegeben sind: so nennt man es, sie zu zwei combiniren, wenn man je zwei ab, oder cd u. s. w. zusammenstellt. Zu drei combinirt man sie, wenn man drei von ihnen aushebt und zusammenstellt, wie acd, ade; und so findet ein Combiniren zu vier, fünf u. s. w. Statt.

53. Man kann bei diesem Zusammenstellen entweder lauter verschiedene Gröfsen fordern, so dafs in derselben Zusammenstellung keine der Gröfsen mehrmals vorkommen darf; oder man kann Wiederholungen derselben Gröfse erlauben, wo dann unter den Combinationen zu dreien auch aaa, aab und ähnliche vorkommen dürften. Jenes nennen wir Combinationen ohne Wiederholung; dieses Combinationen mit verstatteten Wiederholungen. Die Combinationen gelten aber nur dann als wirklich verschiedene Combinationsformen, wenn die darin vorkommenden Gröfsen nicht alle dieselben, etwa nur in veränderter Ordnung sind, wie in einer der andern Combinationsformen. z. Beispiel. Die Combinationsform aaabb ist von aaaab verschieden; aber aaabb ist nicht verschieden von ababa, denn sie enthalten dieselben Gröfsen.

54. Aufgabe. Es sind n Gröfsen gegeben, wie oft lassen sie sich zu zwei, wie oft zu drei u. s. w. combiniren, wenn keine Wiederholung derselben Gröfse in einer Zusammenstellung verstattet ist.

Auflösung. Die Anzahl der Combinationen zu zwei ist $= \frac{n.(n-1)}{1.2}$; die Anzahl der Combinationen

zu drei ist $= \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$; die Anzahl der Combinationen zu vier ist $= \frac{n.(n-1).(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$.

Endlich wenn q irgend eine Anzahl zu verbindender Größsen bedeutet, die Anzahl der aus q Größsen gebildeten Combinationen

$$= \frac{n.(n-1)(n-2)\ldots(n-(q-1))}{1.2.3\ldots q}$$

Beweis. 1. Wenn die Größsen a, b, c, d, e und so weiter heifsen: so kann a mit allen (n — 1) übrigen, so kann b mit allen (n — 1) übrigen verbunden werden, und so gehen, da jede der n Größsen, (n — 1.) Verbindungen eingehen kann, n.(n — 1) Verbindungen hervor. Aber unter diesen kommt b mit a verbunden und a mit b verbunden, und so jede Combinationsform zweimal vor; da wir nun ab und ba nicht als verschieden ansehen, indem hier vom Permutiren nicht die Rede ist, so ist die Anzahl der wirklich verschiedenen Combinationsformen

$$= \frac{n.(n-1)}{1.2}.$$

2. Um die Verbindungen zu dreien zu erhalten, kann man jede der Combinationen zu zwei nehmen, und mit ihr nach und nach alle noch übrigen (n—2) Größsen verbinden. So würden $\frac{n.(n-1).(n-2)}{2}$ Verbindungen hervorgehen; aber unter diesen kömmt zum Beispiel ab verbunden mit c, ac verbunden mit b, bc verbunden mit a vor, und dieses dreimalige Vorkommen findet bei allen Statt; also ist

$$\frac{n.(n-1).(n-2)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3}$$

die wahre Anzahl der Verbindungen zu dreien.

3. Die Verbindungen zu vier erhielte man, wenn man jede der Verbindungen zu drei mit einer der $(n-3)$ übrigen Gröſsen zusammen nähme. So würden

$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3}$$

Verbindungen entstehen; aber so wie abc mit d verbunden, abd mit c verbunden, acd mit b verbunden, bcd mit a verbunden, sämmtlich abcd geben, so kommen immer vier gleiche Verbindungen vor, die nur als eine anzusehen sind, daher ist

$$\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4}$$

die Anzahl der Verbindungen zu vier.

54. Eben so lassen sich die Schlüsse fortführen, und die Richtigkeit der Regel für Verbindungen zu q allgemein übersehen.

55. Der Grund, warum nach der eben gegebnen Anleitung jede Zusammensetzung aus fünfen fünf Mal, u. s. w. vorkömmt, erhellt leicht, weil nämlich die nächst niedrigern Zusammensetzungen denen die erste, denen die zweite, denen die dritte, denen die vierte, denen die fünfte der Gröſsen fehlt, sämmtlich eine gleiche Verbindung zu fünf geben können, und so bei allen übrigen.

56. Wenn man jede der n Gröſsen mit den $(n-1)$ übrigen verbindet, so erhält man alle Verbindungen zu zwei, zugleich in ihren permutirten Formen nämlich ab, ba, ac, ca. Behält man alle diese bei, und verbindet jede derselben mit den übrigen Gröſsen, so gibt jede jener Combina-

tionen zu zwei, (n — 2) Combinationen zu drei, also kommen in allem n . (n — 1) . (n — 2) Combinationen zu drei. Hier sind die Permutationen alle als besondre Formen aufgeführt. Wenn man also nach dieser Regel die Combinationen sucht, so muſs man mit der Anzahl der Permutationen jedesmal dividiren, wie es im §. 54. gelehrt ist.

Beispiel. Die 4 Gröſsen a, b, c, d geben, indem man a mit allen übrigen verbindet, ab, ac, ad; indem man b mit allen verbindet, ba, bc, bd; indem man c mit allen verbindet, ca, cb, cd; endlich d mit allen verbunden da, db, dc. 12 permutirte Combinationen zu zwei, die nun als sechs wirklich verschiedne anzusehen sind.

Jene 12 würden, indem man ab mit c und d, ac mit b und d und so weiter verbindet, 24 Combinationen zu drei geben: 1) abc; 2) abd, 1) acb, 3) acd, 2) adb, 3) adc, 1) bac, 2) bad, 1) bca; 4) bcd, 2) bda, 4) bdc, 1) cab, 3) cad, 1) cba, 4) cbd, 3) cda, 4) cdb, 2) dab, 3) dac, 2) dba, 4) dbc. 3) dca, 4) dcb.

Diese permutirten Combinationen geben aber nur vier aus verschiedenen Elementen bestehende, indem die mit 1 bezeichneten, die mit 2 bezeichneten, die mit 3 bezeichneten, die mit 4 bezeichneten, nichts als Permutationen derselben Gröſsen sind.

57. Lehrsatz. Man findet die Anzahl der aus n Gröſsen ohne Wiederholung möglichen Combinationen zu q, wenn man zu der Anzahl der aus (n — 1) Gröſsen möglichen Verbindungen zu (q — 1), die Anzahl der aus (n — 1) Gröſsen möglichen Verbindungen zu q addirt.

Beweis. Wir wollen uns unter den n Gröſsen die erste a ausgesondert denken, und die Combinationen jede aus q Gröſsen zu Stande gebracht denken, welche kein a enthalten: so ist dies ja die Anzahl der aus (n — 1) Gröſsen möglichen Verbindungen zu q. Um nun aber auch die Verbindungen, jede von q Gröſsen zu bekommen, welche a enthalten, verbindet man von den (n — 1) übrigen Gröſsen jedes Mal

(q — 1) Größen und setzt jeder dieser Verbindungen a hinzu. Die erste Anzahl enthält alle aus q Größen bestehende Verbindungen, denen a fehlt; die letzte alle in denen a vorhanden ist.

Beispiel. Um alle Combinationen zu vier aus den sechs Größen a, b, c, d, e, f zu erhalten, suche ich aus den fünf letzten die Combinationen zu vier, nämlich: bcde, bcdf, bcef, bdef, cdef; dann aber alle Combinationen zu drei aus jenen 5 Größen, bcd, bce, bcf, bde, bdf, bef, cde, cdf, cef, def, welchen man a beifügen muss, um alle 15 Combinationen

$$\left\{ = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} \text{ nach §. 54.} \right\}$$

zu vier zu erhalten.

58. Diese Betrachtung leitet gleichfalls zu einem Beweise für die Regel im §. 54. Gilt nämlich die dortige Regel für (n — 1) Größen zu (q — 1) und zu q combinirt: so ist die Anzahl der Combinationen beider Arten

$$= \frac{(n-1).(n-2)\ldots\ldots(n-1-(q-2))}{1 \;.\; 2 \;.\;.\;.\;.\; (q-1)}$$

$$\text{und} = \frac{(n-1).(n-2)\ldots.(n-1-(q-1))}{1 \;.\; 2 \;.\;.\;.\;.\; q}$$

$$\text{oder jene} = \frac{(n-1)(n-2).(n-3)\ldots\ldots(n-q+1)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\;.\;.\;.\; (q-1)}$$

$$\text{und diese} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-q+1)(n-q)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\;.\;.\;.\; (q-1).\,q}$$

$$\text{deren Summe} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)}{1 \;.\; 2 \ldots (q-1)} \left\{ 1 + \frac{n-q}{q} \right\}$$

$$\text{oder} = \frac{n.(n-1)(n-2)\ldots(n-(q-1))}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\;.\;.\;.\; q}$$

ist, wie dort, als Anzahl der Combinationen zu q aus n Größen. Da nun die Regel für die Anzahl der Combinationen aus zwei Größen, wenn man sie

zu ein und ein nimmt; und wenn man sie zu zwei nimmt, gilt: so gilt sie für alle folgende.

59. Aufgabe. Es sind nur zwei von einander verschiedene Grössen gegeben, wie oft lassen sich diese, bei verstatteter Wiederholung, zu zwei, zu drei, zu q combiniren?

Auflösung. Die Anzahl der Combinationen zu zwei ist $= \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3$.

die Anzahl der Combinationen zu drei $= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

die Anzahl der Combinationen zu q ist

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots (2+q-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots q}$$

Beweis. 1. Combinationen zu zwei kann es hier nur folgende drei geben: aa, ab, bb.

2. Combinationen zu drei kann es geben: eine, worin a dreimal, eine, worin a zweimal, eine, worin a einmal, eine, worin a gar nicht vorkömmt: aaa, aab, abb, bbb.

3. In den aus a, b gebildeten Combinationen zu q, kann a erstlich q Mal, zweitens (q—1) Mal, drittens (q—2) Mal u. s. w., endlich a einmal, a gar nicht vorkommen. Es gibt also

$$(q+1) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (2+(q-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots q}$$

solche Combinationen.

60. Lehrsatz. Man findet die Anzahl der aus n Grössen mit erlaubter Wiederholung möglichen Combinationen zu q, wenn man die Anzahl der aus (n—1) Grössen möglichen Combinationen zu q zu der Anzahl der aus n Grössen möglichen Combinationen zu

$(q-1)$, (alles mit Verstattung der Wiederholungen) addirt.

Beweis. Wir wollen uns unter den n Grössen die erste a ausgesondert denken, so gibt es erstlich so viel Combinationen zu q, ohne Beitritt der a, als sich aus $(n-1)$ Grössen bilden lassen. Zweitens aber, wenn man alle Verbindungen zu $(q-1)$ sucht, die aus sämmtlichen n Grössen (a nicht ausgeschlossen), möglich sind, und jeder von ihnen noch a beifügt, so hat man alle diejenigen, worin a einmal und mehrmal vorkömmt. Die Summe beider Mengen ist also die Anzahl aller aus n Grössen zu bildenden Verbindungen zu q.

Beispiel. Drei Grössen a, b, c zu zwei combinirt geben die Formen aa, ab, ac, bb, bc, cc; und zwei Grössen bc zu drei combinirt, geben die Formen bbb, bbc, bcc, ccc. Setzt man den erstern noch a hinzu, so hat man alle Combinationen zu drei, in denen a vorkömmt; nämlich aaa, aab, aac, abb, abc, acc, und indem man die letzten, die kein a enthalten, beifügt, bbb, bbc, bcc, ccc, erhält man alle Combinationen zu drei, die aus a, b, c möglich sind.

61. Lehrsatz. Wenn die Wiederholung der zu combinirenden Grössen erlaubt ist, so findet man für n Grössen die Anzahl der Combinationen zu q,

$$= \frac{n.(n+1).(n+2)\ldots.(n+(q-1))}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ q}.$$

Beweis. 1. Wenn diese Regel gilt für $(n-1)$ Grössen zu q combinirt, und für n Grössen zu $(q-1)$ combinirt, so gilt sie auch für n Grössen zu q combinirt. Nach der Regel nämlich, gäbe es für $(n-1)$ Grössen

$$\frac{(n-1).n(n+1)\ldots.(n-1+(q-1))}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ q}\ \text{Comb. zu } q,$$

und für n Grössen

$$\frac{n.(n+1)(n+2)\ldots.(n+(q-2))}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ (q-1)}\ \text{Comb. zu } (q-1);$$

die Summen beider

$$=\frac{n.(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+q-2)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots(q-1)}\left\{\frac{n-1}{q}+1\right\}$$

oder $=\dfrac{n.(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+q-2)(n+q-1)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots(q-1)\;.\;q}$

ist die Anzahl der Combinationen zu q für n Gröfsen (§. 60.).

2. Die Regel gilt aber für die aus zwei Gröfsen möglichen Combinationen zu q; sie gilt auch wenn 3 Gröfsen einzeln genommen werden, (indem sie für n = 3 und q = 1 gibt = 3) folglich gilt sie für drei Gröfsen zu zwei, zu drei, zu q combinirt.

3. Gilt sie also für alle Combinationen aus drei Gröfsen, so wird sie auch für alle Combinationen aus vier Gröfsen gelten, da sie für n = 4 und q = 1 richtig 4 als die Anzahl der Formen, wo eine der vier Gröfsen allein vorkömmt, gibt. Und so läfst sich fortschliefsen.

62. Bemerkung. Um die sämmtlichen Verbindungen in regelmäfsiger Ordnung aufzustellen, würden ähnliche Regeln, wie bei den Permutationen aufzustellen seyn; da wir aber davon hier keinen Gebrauch machen, so setze ich nur einige Beispiele her.

Beispiele. 1. Die Combinationen zu fünf ohne Wiederholung aus den sieben Gröfsen a, b, c, d, e, f, g darzustellen. Ihre Anzahl ist (§. 54.)

$$=\frac{7\;.\;6\;.\;5\;.\;4\;.\;3}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;.\;5}=21.$$ Sie sind folgende:

abcde, abcdf, abcdg, abcef,
abceg, abcfg, abdef, abdeg,
abdfg, abefg, acdef, acdeg,
acdfg, acefg, adefg, bcdef,
bcdeg, bcdfg, bcefg, bdefg,
cdefg.

2. Die Combinationen zu vier mit Wiederholung aus den vier Gröfsen a, b, c, d darzustellen. Ihre Anzahl ist (§. 61.) $=\dfrac{4\;.\;5\;.\;6\;.\;7}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}=35$, nämlich:

aaaa,	aaab,	aaac,	aaad,	aabb,
aabc,	aabd,	aacc,	aacd,	aadd,
abbb,	abbc,	abbd,	abcc,	abcd,
abdd,	accc,	accd,	acdd,	addd,
bbbb,	bbbc,	bbbd,	bbcc,	bbcd,
bbdd,	bccc,	bccd,	bcdd,	bddd,
cccc,	cccd,	ccdd,	cddd,	dddd.

3. Die Combinationen zu vier aus den Gröſsen a, b sind aaaa, aaab, aabb, abbb, bbbb.

Fünfter Abschnitt.

Wie ganze Zahlen aus ganzen Zahlen zusammengesetzt werden.

63. Bemerkung. Jede ganze Zahl kann als Summe von zwei oder mehreren ganzen Zahlen angesehen werden, und es ist unsre Absicht, die sämmtlichen Verbindungen, durch welche eine bestimmte Zahl entstehen kann, darzustellen und ihre Anzahl anzugeben.

64. Aufgabe. Auf wie vielfache Weise kann die ganze Zahl n als Summe zweier ganzen Zahlen gebildet werden?

Auflösung. Wenn n eine gerade Zahl ist, so gibt es $\frac{1}{2}n$ verschiedene Summen; wenn n ungerade ist, so gibt es $\frac{1}{2}(n-1)$ verschiedene Summen aus zwei Zahlen, welche zusammen n geben.

Beweis. Wenn n aus zwei ganzen Zahlen zusammengesetzt wird, so ist entweder eine gröſser als die Hälfte, die andre kleiner als die Hälfte, oder beide sind der Hälfte gleich. Ist also n eine gerade Zahl, so kann der kleinere Theil $=1$, $=2$ u. s. w. bis $\frac{1}{2}n$ seyn. Ist dagegen n eine ungerade Zahl, so

ist die Hälfte keine ganze Zahl, und folglich endigt die Reihe der kleinern Theile schon mit der nächst niedrigern ganzen Zahl, das ist mit $\frac{1}{2}$ (n — 1), und da 1, 2, 3 u. s. w. bis $\frac{1}{2}$ (n — 1) die kleinsten Theile seyn können, denen (n—1) (n—2), (n—3) u. s. w. bis $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$ als gröſseste Theile entsprechen, so erhellt die Richtigkeit der Regel.

Beispiel. 6 ist $=1+5=2+4=3+3$; und 9 ist $=1+8=2+7=3+6=4+5$.

65. **Bemerkung.** Obgleich sich die Zerlegungen einer ganzen Zahl in zwei ganze leicht auffinden lassen, so ist es doch schon hier gut, die Anordnung bei der Aufzählung aller zu befolgen, die uns nachher, um keine zu übergehen, nöthig wird. Man fängt daher damit an, die 1 als die eine der beiden Zahlen, und folglich (n — 1) als die zugehörige anzusehen, man setzt nun nach und nach die um eins gröſseren Zahlen in die erste Stelle, die um eins kleineren in die zweite Stelle, bis man in der Stelle des kleinern Theils keine neue mehr setzen kann, ohne die Hälfte von n zu übertreffen.

Beispiel. Für 17 ist $8+9$ die letzte Summe, weil die kleinere Zahl nicht über 8 hinausgehen kann. Die Zusammensetzungen der 17 sind $1+16$, $2+15$ u. s. w.

66. **Aufgabe.** Die sämmtlichen Zerfällungen der Zahl n in drei ganze Zahlen darzustellen.

Auflösung. 1. Man setzt die Zahl 1 als ersten Theil, und fügt ihr nach und nach alle Zerlegungen der Zahl (n — 1) in zwei Theile bei: so hat man alle diejenigen Zerfällungen der Zahl n in drei ganze Zahlen, in welche 1 als Theil vorkömmt.

2. Man setzt 2 als ersten Theil und fügt alle Zerfällungen der Zahl $(n-2)$ in zwei Theile, jedoch mit Ausschluſs dessen, der die 1 enthielte, bei: so hat man alle Zerfällungen, in denen die 2 vorkömmt und die 1 nicht vorkömmt.

3. Man setzt 3 als ersten Theil, und fügt ihr nach und nach alle Zerlegungen der $(n-3)$ in zwei Theile, jedoch mit Ausschluſs derer, die 1 und 2 enthalten, bei; so hat man alle Zerfällungen der Zahl n in drei Stücke der Art, daſs 3, nicht aber 1 und 2, darin vorkömmt.

4. So fährt man für 4, 5 u. s. w. fort, bis die erste Stelle mit einer so hohen Zahl besetzt ist, daſs man nicht weiter fortgehen kann, ohne in die folgenden kleinere als in die erste zu setzen, das ist bis dahin, wo die erste Stelle mit $\frac{1}{3}n$ oder wenn $\frac{1}{3}n$ ein Bruch wäre, mit der nächst kleinern ganzen Zahl besetzt ist.

Beispiel. Alle Zerfällungen der 16 in drei Theile:

1, 1, 14,			
1, 2, 13,	2, 2, 12,		
1, 3, 12,	2, 3, 11,	3, 3, 10,	
1, 4, 11,	2, 4, 10,	3, 4, 9,	4, 4, 8,
1, 5, 10,	2, 5, 9,	3, 5, 8,	4, 5, 7.
1, 6, 9,	2, 6, 8,	3, 6, 7,	4, 6, 6.
1, 7, 8,	2, 7, 7,		5, 5, 6.

Da $\frac{16}{3} = 5 + \frac{1}{3}$, so kann die erste Stelle höchstens mit 5 besetzt werden.

67. Aufgabe. Anzugeben, auf wie mancherlei Weise die Zahl n sich aus drei ganzen Zahlen zusammensetzen läſst.

Auflösung. Erster Fall. Wenn n eine gerade Zahl ist. In diesem Falle bilde man zwei gewöhnliche abnehmende arithmetische Progressionen, in welche die

Differenz $= 3$ ist, und deren eine $\frac{1}{2}(n-2)$, die andern $\frac{1}{2}(n-2)-1$ zum ersten Gliede hat, und summire alle ihre positiv ausfallenden Glieder. Diese Summe ist die Anzahl der möglichen Zerlegungen in drei Theile.

Zweiter Fall. Wenn n ungerade ist. Dann bildet man eben solche fallende Progressionen, deren Differenz $= 3$ ist, die aber nun mit den Gliedern $\frac{1}{2}(n-1)$ und $\frac{1}{2}(n-1)-2$ anfangen. Die Summe ihrer positiven Glieder gibt die verlangte Anzahl.

Beispiel. Für $n = 16$ hätte man die Summe der beiden Reihen $7+4+1$
und $6+3$, also 21 als die Anzahl der möglichen Zerfällungen der 16 in drei Theile.

Für $n = 17$ hätte man dagegen die beiden Reihen
$8+5+2$
$6+3$ zu summiren, also 25 Zerfällungen.

Beweis. Erster Fall. Wenn n gerade ist.

1. Dann ist also $(n-1)$ ungerade, und die Anzahl der Zerfällungen, in welchen 1 vorkömmt, ist ebenso groſs $= \frac{1}{2}(n-2)$ als die Anzahl der Zerfällungen in zwei Theile für die Zahl $(n-1)$ ist.

2. Um diejenigen Zerfällungen der n in drei Theile zu finden, in welchen 2 im ersten Platze, also keine 1 vorkömmt, müssen wir die Anzahl der Zerlegungen für die gerade Zahl $(n-2)$ in zwei Theile suchen; diese Anzahl ist $\frac{1}{2}(n-2)$, aber die erste Zerlegung der $(n-2)$, worin 1 vorkömmt, ist für uns nicht mehr brauchbar. Die Anzahl der Zerfäl-

lungen von n in drei Theile, in denen 2 und nicht 1 vorkömmt, ist also $= \frac{1}{2}(n-2)-1$.

3. Die Zerfällungen, wo drei als kleinster Theil den ersten Platz einnimmt, findet man, wenn man die ungerade Zahl $(n-3)$ in zwei Theile zerlegt, aber die beiden ersten, worin 1 und 2 vorkommen, wegläſst. Ihre Anzahl ist also $\frac{1}{2}(n-4)-2$

$$= \frac{1}{2}(n-2)-3.$$

4. Ebenso die Zerfällungen in drei Theile, unter denen 4 der kleinste ist, erhält man durch die Zerfällung der geraden Zahl $(n-4)$ in zwei Theile, unter denen die drei ersten hier nicht berücksichtigt werden, weil sie 1, 2, 3 enthalten. Also ist

$$\frac{1}{2}(n-4)-3 = \frac{1}{2}(n-2)-4$$

diese Anzahl.

5. Dieselbe Betrachtung zeigt, daſs die Anzahl der Zerfällungen, welche 5, welche 7, welche 9 als kleinste Zahlen enthalten: $\frac{1}{2}(n-2)-6$; $\frac{1}{2}(n-2)-9$; $\frac{1}{2}(n-2)-12$ werde; und dagegen die Anzahl derer, in welchen 6, 8, 10 als kleinste Zahlen vorkommen durch $\frac{1}{2}(n-2)-7$; $\frac{1}{2}(n-2)-10$; $\frac{1}{2}(n-2)-13$, ausgedrückt werde.

Zweiter Fall. Wenn n eine ungrade Zahl ist. Dann läſst $(n-1)$ als gerade Zahl $\frac{1}{2}(n-1)$ Zerfällungen in zwei Theile zu, und so oft kömmt 1

im Platze des kleinsten Theiles vor; für 2 im Platze des kleinsten Theiles hat man $\frac{1}{2}(n-3)-1$, oder $\frac{1}{2}(n-1)-2$ Zerlegungen; für 3 im Platze des kleinsten Theils hat man $\frac{1}{2}(n-3)-2=\frac{1}{2}(n-1)-3$, u. s. w. als Anzahl der Zerfällungen.

68. Aufgabe. Die sämmtlichen Zerfällungen der Zahl n in vier Theile geordnet, darzustellen.

Auflösung. 1. Man setze die 1 im ersten Platze und füge ihr nach und nach die Zerfällungen der Zahl $(n-1)$ in drei Theile bei, und diese so geordnet, daſs allemal der kleinste Theil voranstehe, und sie so wie es §. 66. angibt, geordnet einander folgen.

2. Die 2 nehme den ersten Platz ein und man lasse die Zerfällungen der $(n-2)$ in drei Theile, jedoch mit Weglassung aller die 1 enthalten, nach eben dem Gesetze geordnet, ihr folgen.

3. Ebenso lasse man die 3 so oft den ersten Platz einnehmen als es Zerfällungen der Zahl $(n-3)$ in 3 Theile, unter denen jedoch die wegbleiben, welche 1 und 2 enthalten, gibt.

4. So fährt man mit 4, 5 u. s. w. im ersten Platze fort, und hört erst da auf, wo eine weitere Fortsetzung eine gröſsere Zahl in den ersten Platz, als in einen der folgenden Plätze bringen würde. Das heiſst, in der ersten Stelle kann nie eine Zahl stehen, die gröſser als $\frac{1}{4}n$ ist, und wenn $\frac{1}{4}n$ keine ganze Zahl ist, so endigt man mit der nächst niedrigern ganzen Zahl.

Beispiel. 16 auf alle mögliche Weise aus vier ganzen Zahlen zusammen gesetzt.

1, 1, 1, 13.	1, 2, 2, 11.	1, 3, 3, 9.	2, 2, 2, 10.	3, 3, 3. 7.
1, 1, 2, 12.	1, 2, 3, 10.	1, 3, 4, 8.	2, 2, 3, 9.	3, 3, 4, 6.
1, 1, 3, 11.	1, 2, 4, 9.	1, 3, 5, 7.	2, 2, 4, 8.	3, 3, 5, 5.
1, 1, 4, 10.	1, 2, 5, 8.	1, 3, 6, 6.	2, 2, 5, 7.	3, 4, 4, 5.
1, 1, 5, 9.	1, 2, 6, 7.	1, 4, 4, 7.	2, 2, 6, 6.	4, 4, 4, 4.
1, 1, 6, 8.		1, 4, 5, 6.	2, 3, 3, 8.	
1, 1, 7, 7.		1, 5, 5, 5.	2, 3, 4, 7.	
			2, 3, 5, 6.	
			2, 4, 4, 6.	
			2, 4, 5, 5.	

69. Die Regeln für die übrigen Zerlegungen lassen sich hieraus ohne Schwierigkeit herleiten, wenn man immer die kleinsten Theile voransetzt, und die größern nach und nach folgen läßt. Ich setze daher nur noch die sämmtlichen Zerlegungen der Zahl 16 als Beispiel her.

16 aus fünf Theilen zusammengesetzt

1, 1, 1, 1, 12	1, 1, 3, 3, 8.	1, 2, 3, 3, 7.	2, 2, 2, 2, 8.
1, 1, 1, 2, 11	1, 1, 3, 4, 7.	1, 2, 3, 4, 6.	2, 2, 2, 3, 7.
1, 1, 1, 3, 10	1, 1, 3, 5, 6.	1, 2, 3, 5, 5.	2, 2, 2, 4, 6.
1, 1, 1, 4, 9	1, 1, 4, 4, 6.	1, 2, 4, 4, 5.	2, 2, 2, 5, 5.
1, 1, 1, 5, 8	1, 1, 4, 5, 5.	1, 3, 3, 3, 6.	2, 2, 3, 3, 6.
1, 1, 1, 6, 7	1, 2, 2, 2, 9.	1, 3, 3, 4, 5.	2, 2, 3, 4, 5.
1, 1, 2, 2, 10	1, 2, 2, 3, 8.	1, 3, 4, 4, 4.	2, 2, 4, 4, 4.
1, 1, 2, 3, 9	1, 2, 2, 4, 7.		2, 3, 3, 3, 5.
1, 1, 2, 4, 8	1, 2, 2, 5, 6.		2, 3, 3, 4, 4.
1, 1, 2, 5, 7			3, 3, 3, 3, 4.
1, 1, 2, 6, 6			

16 aus sechs Theilen zusammengesetzt.

1, 1, 1, 1, 1, 11.	1, 1, 2, 2, 2, 8.	1, 2, 2, 2, 2, 7.
1, 1, 1, 1, 2, 10.	1, 1, 2, 2, 3, 7.	1, 2, 2, 2, 3, 6.
1, 1, 1, 1, 3, 9.	1, 1, 2, 2, 4, 6.	1, 2, 2, 2, 4, 5.
1, 1, 1, 1, 4, 8.	1, 1, 2, 2, 5, 5.	1, 2, 2, 3, 3, 5.
1, 1, 1, 1, 5, 7.	1, 1, 2, 3, 3, 6.	1, 2, 2, 3, 4, 4.
1, 1, 1, 1, 6, 6.	1, 1, 2, 3, 4, 5.	1, 2, 3, 3, 3, 4.
1, 1, 1, 2, 2, 9.	1, 1, 2, 4, 4, 4.	1, 3, 3, 3, 3, 3.
1, 1, 1, 2, 3, 8.	1, 1, 3, 3, 3, 5.	2, 2, 2, 2, 2, 6.
1, 1, 1, 2, 4, 7.	1, 1, 3, 3, 4, 4.	2, 2, 2, 2, 3, 5.
1, 1, 1, 2, 5, 6.		2, 2, 2, 2, 4, 4.
1, 1, 1, 3, 3, 7.		2, 2, 2, 3, 3, 4.
1, 1, 1, 3, 4, 6.		2, 2, 3, 3, 3, 3.
1, 1, 1, 3, 5, 5.		
1, 1, 1, 4, 4, 5.		

16 aus sieben Theilen zusammengesetzt:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 10.	1, 1, 1, 2, 2, 2, 7.	1, 2, 2, 2, 2, 2, 5.
1, 1, 1, 1, 1, 2, 9.	1, 1, 1, 2, 2, 3, 6.	1, 2, 2, 2, 2, 3, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 3, 8.	1, 1, 1, 2, 2, 4, 5.	1, 2, 2, 2, 3, 3, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 4, 7.	1, 1, 1, 2, 3, 3, 5.	2, 2, 2, 2, 2, 2, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 5, 6.	1, 1, 1, 2, 3, 4, 4.	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3.
1, 1, 1, 1, 2, 2, 8.	1, 1, 1, 3, 3, 3, 4.	
1, 1, 1, 1, 2, 3, 7.	1, 1, 2, 2, 2, 2, 6.	
1, 1, 1, 1, 2, 4, 6.	1, 1, 2, 2, 2, 3, 5.	
1, 1, 1, 1, 2, 5, 5.	1, 1, 2, 2, 2, 4, 4.	
1, 1, 1, 1, 3, 3, 6.	1, 1, 2, 2, 3, 3, 4.	
1, 1, 1, 1, 3, 4, 5.	1, 1, 2, 3, 3, 3, 3.	
1, 1, 1, 1, 4, 4, 4.		

16 aus acht Theilen zusammengesetzt:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 9.	1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 6.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 8.	1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 5.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 7.	1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 6.	1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5.	1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 7.	1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 5.
1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 6.	1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 5.	1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 5.	1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 3, 4, 4.	1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3.
	1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3.
	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2.

16 aus neun Theilen zusammengesetzt:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8.	1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 5.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 7.	1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 6.	1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 5.	1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 6.	1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 5.	1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 4.	1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 4.	

16 aus zehn Theilen zusammengesetzt:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 7.	
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 6.	1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5.	1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4.	1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 5.	1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4.	
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3.	

16 aus eilf Theilen:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 5.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2.

16 aus zwölf Theilen:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2.

16 aus dreizehn Theilen:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2.

16 aus vierzehn Theilen:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2.

16 aus funfzehn Theilen:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2.

16 aus sechszehn Theilen:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

70. Anmerkung. Die Bestimmung, wie viele solche Zerfällungen in 4, in 5 und mehr Theile möglich sind, lasse ich hier weg, theils weil wir in der Folge mehr die Darstellung aller einzelnen Zerfällungen als die Uebersicht ihrer Anzahl gebrauchen, theils weil sich nachher eine leichtere Regel zu Bestimmung dieser Anzahl darbietet.

Sechster Abschnitt.

Von den Variationen.

71. Erklärung. Wenn man sich willkürliche Gröfsen in mehrere Reihen zusammen geordnet denkt, und nun fordert, dafs bei den aus diesen Gröfsen zu bildenden Verbindungen, allemal aus jeder der Rei-

hen eine Gröſse genommen werde, so erhält man die Variationen, die sich aus den gegebenen, den verschiedenen Reihen angehörenden Gröſsen, bilden lassen.

Beispiel. Enthält die erste Reihe die willkürlichen Gröſsen:

	A,	B,	C,	D,	E,
die zweite Reihe	a,	b,	c,	d,	e,
die dritte Reihe	α,	β,	γ,	δ,	ε,
die vierte Reihe	$\mathfrak{a}$,	$\mathfrak{b}$,	$\mathfrak{c}$,	$\mathfrak{d}$,	$\mathfrak{e}$,

so sind $Aa\alpha\mathfrak{a}$, $Aa\alpha\mathfrak{b}$, und so auch $Da\gamma\mathfrak{c}$, $Db\delta\mathfrak{c}$ Variationsformen aus jenen Reihen gebildet.

72. Aufgabe. Alle Variationsformen geordnet darzustellen, die sich aus zwei Reihen von Gröſsen bilden lassen.

Auflösung. 1. Man setze die erste Gröſse der ersten Reihe, und verbinde mit ihr die erste und dann nach und nach alle folgenden Gröſsen der zweiten Reihe.

2. Eben so wird die zweite Gröſse der ersten Reihe mit allen Gröſsen der zweiten einzeln genommen, verbunden.

3. So geht man alle Gröſsen der ersten Reihe durch, um sie nach und nach mit allen der zweiten Reihe zu verbinden.

Beispiel. Die Reihen A, B, C,
und α, β, γ, δ
geben folgende Variationsformen: $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $A\delta$, $B\alpha$, $B\beta$, $B\gamma$, $B\delta$, $C\alpha$, $C\beta$, $C\gamma$, $C\delta$.

73. Aufgabe. Aus drei Reihen von Gröſsen alle Variationsformen geordnet darzustellen.

Auflösung. 1. Man bildet, nach der eben gegebenen Anleitung, alle aus den beiden letzten Reihen möglichen Variationsformen in der gehörigen Ordnung.

2. Man setzt diesen allen die erste Gröſse der ersten Reihe voran; man setzt ihnen allen die zweite

Größse der ersten Reihe voran, und fährt so für alle Größsen der ersten Reihe fort.

74. So erhält man die Variationsformen so geordnet, daſs immer ein Glied der ersten Reihe den ersten Platz einnimmt, ein Glied der zweiten Reihe den zweiten, ein Glied der dritten Reihe den dritten Platz. Sie folgen sich so, daſs immer die frühern Glieder derselben Reihe eher kommen als die spätern Glieder, ferner daſs alle Variationsformen, worin das erste Glied der ersten Reihe vorkommt, erschöpft werden, ehe man an Formen kömmt, die das zweite Glied der ersten Reihe enthalten.

Beispiele. Die Reihen A, B, C,
m, n, o,
α, β, γ,

geben als Variationsformen, die aus den beiden letzten hervorgehen, richtig geordnet, folgende:

mα, mβ, mγ, nα, nβ, nγ, oα, oβ, oγ; also sind die sämmtlichen Variationsformen aus den drei Reihen:

Amα,	Amβ,	Amγ,	Anα,	Anβ,	Anγ,
Aoα,	Aoβ,	Aoγ,	Bmα,	Bmβ,	Bmγ,
Bnα,	Bnβ,	Bnγ,	Boα,	Boβ,	Boγ,
Cmα,	Cmβ,	Cmγ,	Cnα,	Cnβ,	Cnγ,
Coα,	Coβ,	Coγ.			

75. Bemerkung. Die Auffindung aller Variationsformen aus vier Reihen ist nun nicht schwer, indem man die Variationsformen aus den drei letzten Reihen, nach der vorigen Anleitung vollständig und richtig geordnet sucht, und nun jeder derselben die erste Gröſse der ersten Reihe, die zweite der ersten Reihe u. s. w. vorsetzt.

Und so lieſsen sich Regeln für mehrere Reihen geben.

76. Bemerkung. Die Anzahl der Variationsformen ist leicht zu finden. Besteht nämlich die eine Reihe aus n Gröſsen, die zweite aus m Gröſsen, so gehen aus ihnen so viele Variationsformen hervor, als

das Produkt m.n angibt. Enthält die dritte Reihe l Gröfsen, so ist das Produkt l.m.n die Anzahl der aus den drei Reihen möglichen Variationsformen u. s. w.

77. Bemerkung. Wenn man jedes Glied einer Reihe durch seinen Zähler, Zeiger oder Index angibt, als das erste, zweite, dritte u. s. w.: so kann man diejenigen Variationsformen als die höhern ansehen, wo die Summe der Zeiger mehr beträgt. Im Vorigen war Cmγ eine Variationsform aus dem 3ten, 1ten, 3ten Gliede gebildet, die Summe der Zeiger beträgt also $3+1+3=7$, also ist jene Variationsform eben so hoch als Bnγ oder als Aoγ, indem die Zeiger $2+2+3=7$, und $1+3+3=7$ geben. Coγ dagegen wäre höher.

78. Erklärung. Man nennt diejenigen Variationsformen Variationen zu bestimmten Summen, wo die zusammengezählten Zeiger oder Nummern der Glieder eine bestimmte Summe geben.

Beispiel. Wenn A, B, C, D,
m, n, o, p,
α, β, γ.
die Reihen von Gröfsen sind, und man eignet A, m, α den Zeiger 1; B, n, β den Zeiger 2; C, o, γ den Zeiger 3; D, p den Zeiger 4 zu: so ist die Summe der Zeiger $=5$ in folgenden Variationsformen:

Amγ; Anβ; Aoα; Bmβ; Bnα; Cmα; denn die Zeiger sind 1, 1, 3; 1, 2, 2; 1, 3, 1; 2, 1, 2; 2, 2, 1; 3, 1, 1.

79. Bemerkung. Um diese Rücksicht auf den Zeiger oder Index des Gliedes zu erleichtern, thut man wohl jedem Gliede die dem Zeiger entsprechende Potenz einer willkürlichen Gröfse x beizufügen. Sieht man dann die gemachten Verbindungen als Produkte an, so sind Variationsformen zu gleichen Summen nichts anders, als Glieder, die gleiche Potenzen von x enthalten.

Beispiel. Die Reihen mögen seyn

$$\begin{array}{llll} A, & Bx, & Cx^2, & Dx^3, \\ & \alpha x, & \beta x^2, & \\ a, & bx, & cx^2, & \end{array}$$

wo A und a Glieder sind, die den Index = o haben. Dann entstehen, weil in jeder Variationsform ein Glied jeder Reihe vorkommen muſs, folgende Variationsformen: $A\alpha ax$, $A\alpha bx^2$, $A\beta ax^2$, $B\alpha ax^2$; $A\alpha cx^3$, $A\beta bx^3$, $B\alpha bx^3$, $B\beta ax^3$, $C\alpha ax^3$, $A\beta cx^4$, $B\alpha cx^4$, $B\beta bx^4$, $C\alpha bx^4$, $C\beta ax^4$, $D\alpha ax^4$, $B\beta cx^5$, $C\alpha cx^5$, $C\beta bx^5$, $D\alpha bx^5$, $D\beta ax^5$, $C\beta cx^6$, $D\alpha cx^6$, $D\beta bx^6$, $D\beta cx^7$. Mehrere sind aus den gegebnen Gröſsen nicht möglich, und sie sind nun hier nach den Potenzen von x geordnet.

80. Die Anzahl der zu bestimmenden Variationen zu gleichen Summen hängt davon ab, auf wie mannigfaltige Weise sich die verlangte Summe, das ist der Exponent von x in den verlangten Produkten aus den Exponenten von x in den gegebnen Gröſsen zusammensetzen läſst.

Beispiel. In den vorigen Reihen (§. 79.) waren die sämmtlichen Variationsformen zur Summe 3, folgende: $A\alpha cx^3$, $A\beta bx^3$, $B\alpha bx^3$, $B\beta ax^3$, $C\alpha ax^3$. Die Zeiger waren nämlich: 0, 1, 2, 3, in der ersten,
1, 2, in der zweiten,
0, 1, 2, in der dritten Reihe,
und die drei ist Summe von 0, 1, 2; von 0, 2, 1; von 1, 1, 1; von 1, 2, 0; endlich von 2, 1, 0, wo immer der aus der ersten Reihe genommene Zeiger voransteht und die übrigen folgen.

81. Wären die Reihen aus einerlei Gröſsen gebildet, wie

$$\begin{array}{lll} a, & bx, & cx^2, \\ a, & bx, & cx^2, \\ a, & bx, & cx^2, \end{array}$$

so käme dieses auf diejenigen Zusammensetzungen ganzer Zahlen aus ganzen Zahlen hinaus, die wir im fünften Abschnitt betrachtet haben.

Zweite Abtheilung.

Darstellung des polynomischen Lehrsatzes.

Erster Abschnitt.

Von der Multiplication mehrerer polynomischen Factoren in einander.

82. **Erklärung.** Eine Gröſse heiſst **eintheilig, monomomisch**, wenn sie nur aus einem Gliede besteht, also gar nicht mehrere mit + oder — verbundene Glieder enthält. Sie heiſst **zweitheilig, binomisch**, sie heiſst **dreitheilig, trinomisch** oder endlich **vieltheilig, polynomisch**, je nachdem sie aus zwei, drei oder mehreren durch + oder — verbundenen Theilen besteht.

83. **Bemerkung.** Sollen zwei polynomische Gröſsen in einander multiplicirt werden: so geschieht dies dadurch, daſs der erste Theil der ersten Gröſse nach und nach in alle Theile der zweiten Gröſse, daſs der zweite der ersten Gröſse in alle Theile der zweiten Gröſse u. s. w. multiplicirt wird.

Auf ähnliche Weise verfährt man, wenn man mehrere polynomische Gröſsen in einander multipli-

cirt. Man multiplicirt das erste Glied der dritten Gröſse mit alle den Gliedern, welche man als Produkt der beiden ersten Gröſsen erhalten hat; man multiplicirt das zweite und jedes folgende Glied der dritten Gröſse mit allen Gliedern des Produktes der zwei ersten Gröſsen. Eben so verfährt man mit der vierten Gröſse in Beziehung auf das aus den drei ersten erhaltene Produkt u. s. w.

Dieses Verfahren ist offenbar nichts anders als ein Aufsuchen der sämmtlichen Variationsformen, welche sich aus den Gliedern der Reihen bilden lassen (vgl. §. 72. 73.), die man nun als Produkte zu betrachten hat; und mit den Zeichen + oder — bezeichnet, wie es nach den Regeln des Multiplicirens mit entgegengesetzten Gröſsen seyn muſs.

Beispiel. Sind $A + B + C$;
$a + b + c$;
$\alpha + \beta + \gamma + \delta$,

die in einander zu multiplicirenden Gröſsen: so sind $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma$, $a\delta$, $b\alpha$, $b\beta$, $b\gamma$, $b\delta$, $c\alpha$, $c\beta$, $c\gamma$, $c\delta$ die sämmtlichen aus den Gliedern der beiden letzten Gröſsen hervorgehenden Variationsformen, und ihre Summe ist das Produkt dieser beiden Gröſsen. Setzt man ihnen die Glieder der ersten Reihe als Factoren voran, so erhält man aus der Summe aller dieser Produkte oder Variationsformen das Produkt jener drei Gröſsen in einander

$$\begin{aligned} = & Aa\alpha + Aa\beta + Aa\gamma + Aa\delta + Ab\alpha \\ & + Ab\beta + Ab\gamma + Ab\delta + Ac\alpha + Ac\beta + \\ & Ac\gamma + Ac\delta + Ba\alpha + Ba\beta + Ba\gamma \\ & + Ba\delta + Bb\alpha + Bb\beta + Bb\gamma + Bb\delta \\ & + Bc\alpha + Bc\beta + Bc\gamma + Bc\delta + Ca\alpha \\ & + Ca\beta + Ca\gamma + Ca\delta + Cb\alpha + Cb\beta + \\ & Cb\gamma + Cb\delta + Cc\alpha + Cc\beta + Cc\gamma + Cc\delta. \end{aligned}$$

Wäre hier einer der Factoren, zum Beispiel B mit — bezeichnet, so würden alle die Produkte negativ, worin B vorkömmt. Enthielte ein Produkt zwei negative Factoren, so wäre es wieder positiv u. s. w.

84. Sind die in einander zu multiplicirenden polynomischen Gröſsen nach den Potenzen einer Haupt-

gröfse z geordnet: so verfährt man zwar ganz eben so, ordnet aber nun die Glieder des Produkts zusammen, die gleiche Potenzen von z enthalten, das ist, diejenigen Glieder, worin Variationen zu gleichen Summen vorkommen.

Beispiel. Es sei das Produkt der drei Gröfsen:

$$\begin{array}{l} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \\ a - bx + cx^2 \\ \alpha - \beta x - \gamma x^2 \end{array}$$

zu suchen, und nach den Potenzen von x zu ordnen.

Es ist

$$\begin{array}{lllllll}
= Aa\alpha & - Aa\beta x & - Aa\gamma x^2 & & & & \\
 & - Ab\alpha x & + Ab\beta x^2 & + Ab\gamma x^3 & & & \\
 & & + Ac\alpha x^2 & - Ac\beta x^3 & - Ac\gamma x^4 & & \\
 & + Ba\alpha x & - Ba\beta x^2 & - Ba\gamma x^3 & & & \\
 & & - Bb\alpha x^2 & + Bb\beta x^3 & + Bb\gamma x^4 & & \\
 & & & + Bc\alpha x^3 & - Bc\beta x^4 & - Bc\gamma x^5 & \\
 & & + Ca\alpha x^2 & - Ca\beta x^3 & - Ca\gamma x^4 & & \\
 & & & - Cb\alpha x^3 & + Cb\beta x^4 & + Cb\gamma x^5 & \\
 & & & & + Cc\alpha x^4 & - Cc\beta x^5 & - Cc\gamma x^6 \\
 & & & + Da\alpha x^3 & - Da\beta x^4 & - Da\gamma x^5 & \\
 & & & & - Db\alpha x^4 & + Db\beta x^5 & + Db\gamma x^6 \\
 & & & & & + Dc\alpha x^5 & - Dc\beta x^6 \quad - Dc\gamma x^7
\end{array}$$

Die einzelnen Produkte folgen hier in der oben (§. 74.) für die Variationsformen angegebnen Ordnung; sie sind aber zugleich so zusammen gestellt, dafs man die Variationen zu gleichen Summen, oder die Glieder, welche gleiche Potenzen von x enthalten, sogleich übersieht.

Da nämlich

A,	a,	α	den Index 0,
B,	$-$b,	$-\beta$	den Index 1,
C,	c,	$-\gamma$	den Index 2,
D,			den Index 3

haben: so ist $- Bc\gamma$ ein Glied, wo die Zeiger $1+2+2=5$ geben, in $Db\gamma$ geben sie 6, und dies sind auch die Exponenten von x in diesen Gliedern.

85. Anmerkung. Diese Betrachtungen zeigen zureichend, wie man bey polynomischen ungleichen Factoren zu verfahren hat. Wir wollen jetzt nur noch die Produkte aus binomischen Factoren, und die Brüche, deren Zähler $= 1$, deren Nenner aber ein Produkt aus binomischen Factoren ist, näher betrachten*).

86. Lehrsatz. Wenn mehrere Factoren von der Form $(1-ax)(1-bx)(1-cx)$ und so weiter in einander multiplicirt werden: so ist in dem Produkte der Coefficient, welcher der ersten Potenz von x beigefügt ist, gleich der negativ genommenen Summe aller jener Grössen a, b, c und so weiter; ferner der Coefficient, welcher x^2 begleitet, gleich der Summe aller Produkte, die sich als Combinationen zu zwei ohne Wiederholung aus den Grössen a, b, c u. s. w. bilden lassen; und allgemein, der Coefficient, welcher x^n begleitet, ist gleich der Summe aller Produkte, die sich als n Grössen enthaltende Combinationen ohne Wiederholung aus den sämmtlichen Grössen a, b, c u. s. w. bilden lassen, und zwar diese Summen negativ genommen, wenn n eine ungerade Zahl, positiv genommen, wenn n eine gerade Zahl ist.

Beispiel. $(1-ax)(1-bx)(1-cx)(1-dx)$ ist $= 1-(a+b+c+d)x+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$ $-(abc+abd+acd+bcd)x^3+abcdx^4$.

Beweis. 1. Wenn nur zwei Factoren da sind, so ist die Regel einleuchtend richtig, indem das alsdann mit der zweiten Potenz abbrechende Produkt

$$= 1-(a+b)x+abx^2 \text{ ist.}$$

2. Wenn aber das Gesetz, welches der Lehrsatz angibt, gilt für irgend eine Anzahl von Facto-

*) Sollten einige Leser die folgenden Sätze bis zu Ende dieses Abschnitts zu schwer finden: so können sie dieselben beim ersten Durchlesen ohne Nachtheil übergehen, indem sie keine Begründung der folgenden Abschnitte enthalten.

ren, so gilt es auch, wenn noch ein Factor mehr in das Produkt aufgenommen wird.

Wir wollen dies zuerst für die Coefficienten von x beweisen.

Haben wir nämlich in dem Produkte

$(1-ax)(1-bx)(1-cx)(1-dx)\ldots\ldots\ldots(1-rx)$

den Coefficienten der ersten Potenz von x,

$=-(a+b+c+d++++r)$, so sind ja die beiden Anfangsglieder unsers Produktes

$=1-(a+b+c+d+e+++r)x$. Bringen wir nun noch einen neuen Factor $(1-sx)$ in das Produkt, so wird das Glied, worin jetzt die erste Potenz von x vorkömmt, nur entstehen aus

$-(a+b+c+d+++r)x$ multiplicirt mit 1, und aus 1 multiplicirt mit $-sx$, so dafs es

$=-(a+b+c+d++++r+s)$ wird, und also auch bei der um eins vermehrten Anzahl von Factoren noch seine, im Lehrsatz bestimmte Form behält. Es wird diese also immer behalten, da es sie für zwei Factoren hatte.

Aber auch bei jedem n^{ten} Gliede gilt eben dieses. Nehmen wir nämlich an, für die Anzahl von r Factoren jener Form wären wirklich bis zu dem Gliede hin, welches die n^{te} Potenz von x enthält, alle Coefficienten der angegebnen Form entsprechend: so wird bei dem Hinzutreten des neuen Factors $(1-sx)$, das Glied, welches in dem neuen Produkte x^n enthält, gebildet, indem das in dem Produkte aus r Factoren vorkommende mit x^n multiplicirte Glied mit 1, und indem das dort mit x^{n-1} multiplicirte Glied mit $-sx$ multiplicirt wird. Der Coefficient, welcher jetzt, in dem Produkte aus $(r+1)$ Factoren, x^n begleitet, besteht also erstlich aus allen den Combinationen zu n, welche sich aus der r ersten Gröfsen ohne Wiederholung bilden lassen, weil er daraus in dem Produkte aus r Factoren bestand; und zweitens aus allen Combinationen zu $(n-1)$ die sich aus den r

ersten Grössen bilden lassen, wenn diesen noch der Factor s beigesetzt wird. Die Summe dieser Verbindungen enthält aber (wie aus §. 57. bekannt ist) alle Combinationen zu n, die sich ohne Wiederholung aus den gegebnen $(r+1)$ Grössen bilden lassen, und der Coefficient von x^n hat also auch in dem neuen Produkte die im Lehrsatze angegebne Form.

3. Ob das Zeichen + oder — wird, bestimmt sich, da wir alle Grössen a, b, c u. s. w. negativ genommen haben, darnach, ob diese Grössen in gerader oder ungerader Anzahl als Factoren vorkommen. Also, da jedes Produkt, worin x^n steht, auch n jener Factoren enthält, so ist es positiv wenn n eine gerade Zahl ist, negativ für ungerade n.

87. Nehmen wir hier alle jene Grössen a, b, c, d, ... r, sämmtlich $=1$, so werden alle jene einzelnen Produkte, die den Combinationen entsprachen $=1$; ihre Summen werden also gleich der Anzahl solcher Combinationen. Hiernach könnte also schon, da das Produkt jetzt aus r gleichen Factoren besteht, die r^{te} Potenz von $1-x$, entwickelt werden. Die Anzahl der aus r Grössen entstehenden Combinationen zu 1, das ist, die Grössen einzeln genommen) ist $=r$; die Anzahl der Combinationen zu 2 ist $\frac{r.(r-1)}{1.2}$; die Anzahl der Combinationen zu n ist $\frac{r.(r-1)(r-2).....(r-(n-1))}{1.2.3.....n}$.

Also wird $(1-x)^r=$

$$1-rx+\frac{r.(r-1)}{1.2}x^2-\frac{r.(r-1)(r-2)}{1.2.3}x^3$$

$$+-+-....\pm\frac{r.(r-1)....(r-(n-1))}{1.2...n}x^n\mp\pm \text{u. s. w.}$$

Anmerkung. Dies ist schon die Entwickelung des binomischen Lehrsatzes, auf den wir aber noch zurückkommen.

88. **Lehrsatz.** Wenn man 1 dividirt mit dem Produkte aus r Größen von der Form $(1-ax)$ oder den Quotienten

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots\ldots(1-rx)} \text{ sucht:}$$

so ist in dem entwickelten Quotienten der Coefficient von x^n gleich der Summe aller Combinationen zu n, die sich mit verstatteter Wiederholung aus r Größen bilden lassen.

Beispiel. $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$

gibt bei x^3 den Coefficienten $aaa + aab + aac + abb + abc + acc + bbb + bbc + bcc + ccc$; bei x^4 den Coefficienten $aaaa + aaab + aaac + aabb + aabc + aacc + abbb + abbc + abcc + accc + bbbb + bbbc + bbcc + bccc + cccc$.

Beweis. 1. Wir wollen den Quotienten, dessen Divisor r Factoren enthält, nämlich:

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)\ldots\ldots(1-rx)} \text{ durch}$$

$$= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots + Nx^n \text{ etc.}$$

ausdrücken, und uns nun noch einen Factor $= (1-sx)$ in den Divisor gesetzt denken. Dann ist ja

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)\ldots\ldots(1-rx)(1-sx)}$$

$$= \frac{1 + Ax + Bx^2 + \ldots + Nx^n + \text{ etc.}}{1-sx}$$

und wenn ich mir auch diesen in eine Reihe entwickelt vorstelle, die $= 1 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots \mu x^{n-1} + \nu x^n +$ u. s. w. heißen mag: so muß ja

$$1 + Ax + Bx^2 + \text{ etc.}$$

$$= (1-sx)(1 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots + \mu x^{n-1} + \text{ etc.}$$

seyn, das ist

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots + Nx^n + \text{etc.}$$

$$= \begin{cases} 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots + \nu x^n + \text{etc.} \\ -sx - \alpha s x^2 - \beta s x^3 - \ldots - \mu s x^n - \text{etc.} \end{cases}$$

Hier muſs aus dem Grunde (§. 25.) der Coefficient einer bestimmten Potenz von x in beiden Reihen gleich, also im allgemeinen Gliede

$$N = \nu - \mu s, \text{ oder } \nu = N + \mu . s$$

seyn; das heiſst: der bei x^n stehende Coefficient in dem Quotienten, der durch $(r+1)$ Divisoren entstanden ist, $(=\nu)$, besteht aus dem Coefficienten N, der in dem durch r Divisoren entstandenen Quotienten die n^{te} Potenz von x begleitet, addirt zu $\mu . s.$, dem mit s multiplicirten Coefficienten der Potenz x^{n-1} in der Reihe, die durch $(r+1)$ Divisoren hervorgebracht ist.

2. Hieraus erhellt, daſs der Lehrsatz für den Coefficienten ν, der bei x^n steht, da wo $(r+1)$ Divisoren vorkommen, gültig bleibt, wenn er bei dem nächst vorhergehenden Coefficienten μ dieser Reihe, und bei dem x^n begleitenden Coefficienten N, der durch r Divisoren entstandenen Reihe gilt. Galt er nämlich bei diesen, so ist N die Summe aller Combinationen zu n aus r Gröſsen und μ die Summe aller Combinationen zu $(n-1)$ aus $(r+1)$ Gröſsen, (mit verstatteter Wiederholung). Also besteht $\nu = N + \mu s$, aus der Summe aller Combinationen zu n aus den r Gröſsen $a, b, c \ldots . r$, so daſs s hier ausgeschlossen wird, und aus der mit s multiplicirten Summe aller Combinationen zu $(n-1)$ aus allen $(r+1)$ Gröſsen $a, b, c \ldots . r, s$, das ist aus allen mit erlaubter Wiederholung möglichen Combinationen zu n, die sich aus jenen $(r+1)$ Gröſsen bilden lassen. (§. 60.)

3. Da nun leicht zu zeigen ist, daſs unser Lehrsatz gilt für einen Divisor, der nur aus dem einzigen Factor $(1-ax)$ besteht, und daſs er für den Coefficienten von x gilt in der Entwickelung von

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$$

so gilt der Lehrsatz für jedes folgende Glied dieses

Quotienten, wo der Divisor ein Produkt zweier Factoren ist.

Da sich ferner leicht zeigen läfst (vergl. den folg. §.) dafs auch bei einem aus r Factoren zusammengesetzten Divisor wenigstens das Glied, worin x^1 vorkömmt, dem Lehrsatze gemäfs

$$= (a+b+c+d+\ldots\ldots+r)x$$

wird, so erhellt, dafs man von dem Quotienten, dessen Divisor zwei Factoren enthielt, auf den, dessen Divisor drei Factoren enthält, und so weiter fortschliefsen darf, woraus also die allgemeine Richtigkeit des Lehrsatzes erhellt.

89. Wenn man nach den Regeln der gewöhnlichen Buchstabenrechnung dividirt, so ist

$$\frac{1}{1-ax} = 1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\ldots+a^nx^n+\text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{1+ax+a^2x^2+\text{etc.}}{1-bx}$$
$$= 1+(a+b)x+(a^2+ab+b^2)x^2+\text{etc.}$$

und wenigstens die zwei ersten Glieder lassen sich auch für mehrere Divisoren leicht finden, und als dem in nr. 3. des vorigen §. Angegebenen entsprechend nachweisen.

90. Bemerkung. Hätte ich statt a gesetzt az, statt b, bz^2, statt c, cz^3, statt r, rz^r: so käme in jedes Produkt aus a, b, c u. s. w. eine Potenz von z, zum Beispiel aac würde $aacz^5$, und der Exponent wäre aus 1, 1, 3, zusammengesetzt. Auf ähnliche Weise würden in allen aus drei Gröfsen gebildeten Produkten der Exponent von z aus drei ganzen Zahlen, in allen aus vier Gröfsen gebildeten Produkten den Exponent von z aus vier ganzen Zahlen zusam-

mengesetzt, und wenn man das Glied, welches x^2 enthält, näher betrachtet, so findet man darin alle Potenzen von z; deren Exponenten sich aus dreien der Zahlen 1 bis r zusammensetzen lassen; das Glied, welches x^4 enthält, bietet alle Potenzen von z dar, deren Exponenten sich aus vier der Zahlen 1 bis r zusammensetzen lassen u. s. w.

Beispiel. $\frac{1}{(1-azx)(1-bz^2x)(1-cz^3x)}$

gibt, als Coefficienten von x $(az+bz^2+cz^3)$, worin alle Exponenten von z vorkommen, welche die Zahlen 1 bis r, das ist hier 1, 2, 3 einzeln genommen, geben können. Entwickelt man den Coefficienten von x^2, so ist er $(a^2z^2+abz^3+acz^4+bbz^4+bcz^5+ccz^6)$ und er enthält alle Potenzen von x, deren Exponenten sich aus zweien der gegebnen Zahlen 1, 2, 3 bilden lassen, nämlich $1+1$, $1+2$, $1+3$, $2+2$, $2+3$, $3+3$. Das Glied, welches x^3 enthält, hat einen Coefficienten, in welchem z alle die Exponenten bekömmt, die sich aus dreien der Zahlen 1 bis r oder hier 1 bis 3 zusammensetzen lassen. Dieses Glied ist nämlich $=x^3(a^3z^3+a^2bz^4+a^2cz^5+abbz^5+abcz^6+accz^7+bbbz^6+bbcz^7+bccz^8+cccz^9)$; die Exponenten sind die Summen $1+1+1$, $1+1+2$, $1+1+3$, $1+2+2$, $1+2+3$, $1+3+3$, $2+2+2$, $2+2+3$, $2+3+3$, $3+3+3$.

Diese Entwickelung liefse sich auch da, wo der Divisor mehr Factoren enthält, wo sie also weitläufiger ausfällt, leicht darstellen.

91. Setzen wir jetzt a, b, c und alle folgenden sämmtl. $=1$, so dafs wir statt ihrer nur z, z^2, z^3 u. s. w. beibehalten: so erhalten wir statt der sämmtlichen Combinationen nur die Anzahl derselben, und die Entwickelung von

$\frac{1}{(1-zx)(1-z^2x)(1-z^3x)(1-z^4x)}$ etc. gibt folgenden Quotienten =

$$
\begin{array}{ll}
1+x & \{ z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8+\text{etc.} \} \\
+x^2 & \{ z^2+z^3+2z^4+2z^5+3z^6+3z^7+4z^8+\text{etc.} \} \\
+x^3 & \{ z^3+z^4+2z^5+3z^6+4z^7+5z^8+\text{etc.} \} \\
+x^4 & \{ z^4+z^5+2z^6+3z^7+5z^8+\text{etc.} \} \\
+x^5 & \{ z^5+z^6+2z^7+3z^8+\text{etc.} \} \\
+x^6 & \{ z^6+z^7+2z^8+\text{etc.} \} \\
+x^7 & \{ z^7+z^8+\text{etc.} \} \\
+x^8 & \{ z^8+\text{etc.} \} \\
+\text{etc.} &
\end{array}
$$

Diese Entwickelung zeigt, wenn man die vorigen Ueberlegungen darauf anwendet, wie oft jede Potenz von z als Produkt aus niedrigern Potenzen mit ganzen Exponenten entstehen kann.

z^6 zum Beispiel hat die Coefficienten 1, 3, 3, 2, 1, 1, bei den nach einander folgenden Potenzen von x; dadurch wird angedeutet, daſs z^6 entstehen kann: einmal aus dem einzigen Factor z^6; dreimal aus zwei Factoren, nämlich als $z.z^5$, $z^2.z^4$, $z^3.z^3$; dreimal aus drei Factoren, nämlich als $z.z.z^4$; $z.z^2.z^3$; $z^2.z^2.z^2$; zweimal aus vier Factoren, nämlich: $z.z.z.z^3$ und $z.z.z^2.z^2$; einmal aus fünf, einmal aus sechs Factoren.

z^8 hat die Coefficienten 1, 4, 5, 5, 3, 2, 1, 1. Es entsteht also z^8 auf eine Weise aus einem Factor $=z^8$; auf viererlei Art aus zwei Factoren, $z.z^7$; $z^2.z^6$; $z^3.z^5$; $z^4.z^4$; auf fünferlei Art aus drei Factoren $z.z.z^6$; $z.z^2.z^5$; $z.z^3.z^4$; $z^2.z^2.z^4$; $z^2.z^3.z^3$; auf fünferlei Art aus vier Factoren $z.z.z.z^5$; $z.z.z^2.z^4$; $z.z.z^3.z^3$; $z.z^2.z^2.z^3$; $z^2.z^2.z^2.z^2$; auf dreierlei Art aus fünf Factoren, nämlich: $z.z.z.z.z^4$; $z.z.z.z^2.z^3$; $z.z.z^2.z^2.z^2$; auf zweierlei Art aus sechs Factoren, nämlich: $z.z.z.z.z.z^3$; $z.z.z.z.z^2.z^2$; auf einerlei Art aus sieben, auf einerlei Art aus acht Factoren.

92. Diese Zusammensetzung der Potenzen aus Factoren oder der Exponenten aus ganzen Zahlen ist eben das, was wir im fünften Abschnitt der ersten Abtheilung betrachteten. Wir haben hier also ein Mittel die Anzahl solcher Zerfällungen ganzer Zahlen in zwei, drei und mehr ganze Zahlen zu finden. Wollen wir die sämmtlichen möglichen Zerlegungen einer Zahl, z. B. 8, haben, so brauchen wir nur $x=1$ zu setzen, und alles nach den Potenzen von z zu ordnen. Der Quotient

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)\ldots(1-z^r)}$$

hat nämlich, in eine Reihe entwickelt, bei jeder Poten von z denjenigen Coefficienten, welcher anzeigt, auf wie mancherlei Weise der Exponent als Summe ganzer Zahlen aus den Zahlen 1, 2, 3...r, entstehen kann.

Die wirkliche Division gibt:

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8+z^9+z^{10}+\text{ etc.},$$

also kann jede Zahl nur auf einerlei Weise aus Zusammensetzungen, in denen blos 1 vorkömmt, enstehen. Ferner ist

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)}=1+z+2z^2+2z^3+3z^4+3z^5+4z^6+4z^7+5z^8+\text{etc.}$$

Es kann also zum Beispiel die Zahl 5 auf dreierlei Art aus Zusammensetzungen entstehen, worin blos 1 und 2 vorkommen, nämlich $1+1+1+1+1$; $1+1+1+2$; $1+2+2$.

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}=1+z+2z^2+3z^3+4z^4+5z^5+7z^6+8z^7+10z^8+\text{ u. s. w.}$$

6 zum Beispiel entsteht auf 7fache Weise aus den

Zahlen 1, 2, 3, nämlich: 1+1+1+1+1+1; 1+1+1+1+2; 2+1+1+3; 1+1+2+2; 1+2+3; 2+2+2; 3+3.

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)} =$$
$$1+z+2z^2+3z^3+5z^4+6z^5+9z^6+11z^7+15z^8+;$$

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)} =$$
$$1+z+2z^2+3z^3+5z^4+7z^5+10z^6+13z^7+18z^8+;$$

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)} =$$
$$1+z+2z^2+3z^3+5z^4+7z^5+11z^6+14z^7+20z^8+;$$

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)\ldots\ldots(1-z^7)} =$$
$$1+z+2z^2+3z^3+5z^4+7z^5+11z^6+15z^7+21z^8+;$$

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)\ldots\ldots(1-x^8)} =$$
$$1+z+2z^2+3z^3+5z^4+7z^5+11z^6+15z^7+22z^8+\text{etc.}$$

Die 8 kann also nur auf 22fache Weise durch Zerlegung in ganze Zahlen entstehen; denn sie kann nicht aus einer Zerlegung, worin 9 oder eine grössere Zahl vorkäme, gebildet werden, also bleibt ihr Coefficient ungeändert, wenn man auch noch mit $(1-z^9)$ oder mit mehreren folgenden Grössen dividirte.

Es wäre nicht schwer, die Divisionen weiter fortzusetzen, und so würde man die Zerlegung der grössern Zahlen bestimmen; die folgende Entwickelung gibt die Anzahl der möglichen Zerfällungen für alle Zahlen bis zu 24 an.

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\ldots(1-z^{24})} \text{ ist } =$$
$$1+z+2z^2+3z^3+5z^4+7z^5+11z^6+15z^7+22z^8+30z^9$$
$$+42z^{10}+56z^{11}+77z^{12}+101z^{13}+135z^{14}+176z^{15}$$

$$+231z^{16}+297z^{17}+385z^{18}+490z^{19}+627z^{20}$$
$$+792z^{21}+1002z^{22}+1255z^{23}+1574z^{24}+\text{etc.}$$

Oben haben wir gesehen (§. 64 bis 69.) daſs sich die Zahl 16 zerlegen lieſs, 8 Mal in zwei, 21 Mal in drei, 34 Mal in vier, 37 Mal in fünf, 35 Mal in sechs, 28 Mal in sieben, 22 Mal in acht, 15 Mal in neun, 11 Mal in zehn, 7 Mal in eilf, 5 Mal in zwölf, 3 Mal in dreizehn, 2 Mal in vierzehn, 1 Mal in funfzehn, 1 Mal in sechzehn Theile. Das gibt, weil 1 Mal unzerlegt hinzukommt, 231 Zerlegungen, wie es unsre Formel angibt.

Zweiter Abschnitt.

Der binomische und polynomische Lehrsatz, für ganze und positive Exponenten.

93. Erklärung. Der binomische Lehrsatz gibt das Gesetz an, wie irgend eine Potenz eines binomischen Ausdrucks entwickelt wird. Der polynomische Lehrsatz zeigt eben dieses für vieltheilige Ausdrücke.

94. Bemerkung. Wenn man eine Gröſse, die aus m Gliedern besteht, mit einer andern, die aus n Gliedern besteht, multiplicirt: so hat das Produkt m.n Glieder, weil jedes Glied der ersten Gröſse in jedes Glied der letzten multiplicirt wird.

Wird eine Gröſse mit sich selbst multiplicirt: so wird, wenn sie n Glieder enthielt, ihre zweite Potenz n^2 Glieder, ihre dritte Potenz n^3 Glieder, ihre r^{te} Potenz n^r Glieder enthalten. Unter diesen Gliedern sind aber mehrere gleich, die wir daher in ein einziges Glied zu vereinigen pflegen.

95. Lehrsatz. In der Potenz eines polynomischen Ausdruckes kömmt jedes aus eben den Factoren zusammengesetzte Glied so oft vor, als diese Factoren sich permutiren lassen.

Beweis. Wir brauchen nur auf die Entstehung des Produktes aus gleichen vieltheiligen Factoren zu sehen und es uns zur Regel zu machen, dafs allemal der aus der ersten Gröfse hergenommene Factor voranstehen, dann der aus der zweiten Gröfse hergenommene, dann der aus der dritten Gröfse hergenommene u. s. folgen soll. Dann erhellt, dafs

$$\begin{array}{lllll} & a+b+c & & & \\ \text{multiplicirt in} & a+b+c & & & \\ \text{folgendes gibt:} & aa+ab+ac & & & \\ & & +ba+ & bb+bc & \\ & & +ca & +cb+cc. & \end{array}$$

Hier kömmt a mit a, b mit b multiplicirt nur einmal, a mit b, b mit a multiplicirt als ein gleiches Produkt zweimal vor, aber so, dafs einmal das erste der gegebnen Polynomien das a, das andre Mal das erste das b als Factor gegeben hat.

Multipliciren wir jene zweite Potenz, indem wir die Glieder so einzeln stehen lassen, mit a+b+c und setzen immer den aus dieser letztern Gröfse genommenen Factor voran, so ist das Produkt:

$$\begin{array}{llllll} =aaa+aab+aac & & & & & \\ \quad +aba & +abb+abc & & & & \\ \quad\quad +aca & +acb+acc & & & & \\ \quad +baa & +bab+bac & & & & \\ & +bba & +bbb+bbc & & & \\ & \quad +bca & & +bcb+bcc & & \\ \quad\quad +caa & +cab+cac & & & & \\ & +cba & & +cbb+cbc & & \\ & \quad +cca & & +ccb & & \\ & & & & +ccc & \end{array}$$

Wir pflegen diese dritte Potenz sogleich in die abgekürzte Form $=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$ zu bringen, wo nun, wie die obige Entwickelung zeigt, die Zahlen Coefficienten an-

geben, wie oft, das heifst, durch wie mannigfaltige Permutation eben das Produkt entstehen kann.

Die Rechnung läfst sich leicht für höhere Potenzen fortsetzen, und es ist nur zu bemerken, dafs in der r^{ten} Potenz eines polynomischen Ausdruckes in jedem Gliede r Factoren verbunden sind, die aus den r gleichen polynomischen Ausdrücken so hergenommen sind, dafs jeder einen derselben liefert.

Unsre Betrachtung zeigt auch, warum unter diesen Produkten so viele gleiche sind, als die Anzahl der Permutationen angibt. Denn so wie in der Bestimmung der zweiten Potenz, aa nur einmal vorkömmt, so wird auch a^r in der r^{ten} Potenz nur einmal vorkommen, weil die Verbindung aller ersten Glieder mit einander nur einmal möglich ist. Dagegen kömmt ein Produkt wie $a^{r-1}b$ in der r^{ten} Potenz r Mal vor, weil es zwar, wenn b aus der ersten Reihe genommen ist, für alle übrigen Reihen nur einmal das Produkt a^{r-1} gibt; aber nun b eben so gut aus der zweiten Reihe genommen werden kann, während aus den $(r-1)$ übrigen Reihen die sämmtlichen Plätze mit a besetzt werden, und man so das b aus jeder der r Reihen hernehmen kann. Auf ähnliche Weise kann man alle Arten von Gliedern durchgehen.

Beispiel. In $(a+b+c)^6$ kömmt aaaabc mit dem Coefficienten $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4} = 30$ vor. Das Produkt aaaa kann nämlich aus den sechs Reihen hergenommen werden, indem man die erste und zweite Reihe nicht benutzt, indem man die 1te und 3te Reihe,
1te und 4te Reihe,
1te und 5te Reihe,
1te und 6te Reihe,
2te und 3te Reihe,
2te und 4te Reihe,
2te und 5te Reihe,
2te und 6te Reihe,

3te und 4te Reihe,
3te und 5te Reihe,
3te und 6te Reihe,
4te und 5te Reihe,
4te und 6te Reihe,
5te und 6te Reihe

nicht benutzt, also auf 15fache Weise. Aber in jedem dieser Fälle kann bc auf doppelte Weise entstehen, je nachdem b aus der ersten oder c aus der ersten der dort nicht benutzten Reihen hergenommen wird. Und so in allen Fällen.

96. Der binomische Lehrsatz. Wenn eine zweitheilige Gröfse $(a+b)$ zur n^{ten} Potenz erhoben wird, so ergibt sich $(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b +$

$$\frac{n.(n-1)}{1\ .\ 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3} a^{n-3} b^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots\ldots(n-(r-1))}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots r} a^{n-r} b^r +$$

$$+ \ldots + \frac{n.n-1}{1\ .\ 2} a^2 b^{n-2} + n a b^{n-1} + b^n$$

Beweis. Wenn man $(a+b)$ zur n^{ten} Potenz erhebt, oder n Mal als Factor setzt: so wird zu Bildung jedes Gliedes aus jedem dieser n binomischen Factoren ein einfacher Factor hergenommen.

Da nun aber nur zwei verschiedene Gröfsen a, b vorhanden sind: so kann entweder die eine Gröfse n Mal als Factor gesetzt werden, a^n und b^n; oder die eine $(n-1)$ Mal die andre 1 Mal, $a^{n-1}b$ und ab^{n-1}; oder die eine $(n-2)$ Mal, die andre 2 Mal, $a^{n-2}b^2$ und a^2b^{n-2}; und so in allen Fällen die eine $(n-r)$ Mal, wenn die andre r Mal gesetzt wird, $a^{n-r}b^r$ und a^rb^{n-r}. Hierdurch ist bestimmt, dafs die einzelnen Glieder, sofern sie aus a und b gebildet werden, nur die im Lehrsatze angedeuteten $(n+1)$ verschiedenen Formen haben können, indem b gar nicht oder b ein Mal oder zwei Mal und so bis n Mal vorkömmt.

Jedes dieser Glieder kömmt aber so oft vor, als seine Permutationszahl angibt, das ist (§. 43. 44. 45.) da n Gröſsen unter welchen r gleiche und $(n-r)$ wieder unter sich gleiche sind, so oft permutirt werden können, als

$$\frac{n.(n-1)(n-2) \ldots (n-(r-1))}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \ldots r}$$

angibt, so ist dies der Coefficient von $a^{n-r}b^r$ und von $a^r b^{n-r}$. Und so erhellt die Richtigkeit des Lehrsatzes.

97. Diese Coefficienten $1, n, \frac{n.n-1}{1.2}$ u. s. w. welche den Produkten aus den Gliedern des Binoms beigefügt sind, heiſsen nun die **Binomial-Coefficienten der n^{ten} Potenz.**

Beispiel. Nach unsrer Formel ist die entwickelte Potenz $(a+b)^{10} = a^{10} + 10\,a^9.b$

$$+\frac{10.9}{1.2}a^8b^2 + \frac{10.9.8}{1.2.3}a^7b^3 + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}a^6b^4$$

$$+\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}a^5b^5 + \frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6}a^4b^6 +$$

$$\frac{10.9.8}{1.2.3}a^3b^7 + \frac{10.9}{1.2}a^2b^8 + 10.ab^9 + b^{10}$$

$$= a^{10} + 10\,a^9b + 45\,a^8b^2 + 120\,a^7b^3 + 210\,a^6b^4$$
$$+ 252\,a^5b^5 + 210\,a^4b^6 + 120\,a^3b^7 + 45\,a^2b^8$$
$$+ 10\,ab^9 + b^{10}.$$

In $(a+b)^{100}$ hat das Glied, worin $a^{61}b^{39}$ vorkömmt, den Coefficienten $\frac{100.99.98 \ldots 62}{1.2.3 \ldots 39}$.

98. Der polynomische Lehrsatz für Gröſsen, deren Glieder ganz unabhängig von einander sind.

Die n^{te} Potenz eines Polynomium, $(a+b+c+d+e+f)$ wird gefunden, wenn man alle möglichen Combina-

tionen zu n mit verstatteter Wiederholung aus den Grössen a, b, c, d, e, f sucht, und jeder dieser Combinationsformen die Anzahl ihrer möglichen Permutationen als Coefficienten beifügt. Die so dargestellten Produkte in eine Summe gebracht, geben die Entwickelung der gesuchten Potenz.

Der Beweis erhellt aus dem Vorigen, doch füge ich noch folgende Erläuterungen bei.

Die aus n Factoren bestehenden, aus den einfachen Gliedern zusammengesetzten Produkte können auf folgende Weise gebildet seyn.

1. Sie enthalten lauter gleiche Factoren, wie a^n oder b^n; dann haben sie den Coefficienten 1, weil sie keine Permutationen erlauben.

2. Sie enthalten $(n-1)$ gleiche Factoren und einen andern Factor, wie $a^{n-1}b$. Dann erhalten sie den Coefficienten n, weil n Grössen, unter welchen $(n-1)$ gleiche sind, n Permutationen erlauben.

3. Sie enthalten $(n-2)$ gleiche Grössen und auch die übrigen 2 Grössen sind unter sich gleich, wie $a^{n-2}b^2$; dann ist der Coefficient $\frac{n.(n-1)}{1.2}$.

4. Sie enthalten $(n-2)$ gleiche Grössen und zwei ungleiche Grössen, wie $a^{n-2}b.c$; dann ist der Coefficient $= n.(n-1)$.

5. Sie enthalten $(n-3)$ gleiche und 3 andere, wieder unter sich gleiche Grössen, wie $a^{n-3}b^3$, dann ist der Coefficient $= \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$.

6. Sie enthalten $(n-3)$ gleiche Grössen und unter den 3 übrigen sind 2 gleich und eine verschieden, wie $a^{n-3}b^2c$, dann ist der Coefficient

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}.$$

7. Sie enthalten $(n-3)$ gleiche Gröſsen und die übrigen sind verschieden, wie $a^{n-3}bcd$; der Coefficient ist $= n.(n-1).(n-2)$.

Und so könnte man alle Fälle durchgehen.

99. Daſs die vorkommenden Produkte aus den einzelnen Gliedern des Polynoms nichts anders sind, als die sämmtlichen Combinationen zu n, die sich mit Wiederholung aus den gegebnen Gröſsen bilden lassen, die in den Gliedern des Polynoms vorkommen, läſst sich so übersehen. In der ersten Potenz, wo diese Gröſsen einzeln, nicht zu Produkten verbunden, vorkommen, erhellt es von selbst; aber indem nun bei Bildung der zweiten Potenz, a mit allen, b mit allen u. s. w. verbunden wird: so erhält man ja alle aus diesen Gröſsen möglichen Combinationen zu 2, als Produkte, und jedes derselben zugleich in allen Permutationsformen. Wird mit jedem dieser Produkte a, mit jedem b, u. s. w. verbunden, so erhält man Produkte, die alle Combinationen zu 3 in allen ihren Permutationsformen darstellen. Und so läſst sich fortschlieſsen, ganz wie in §. 59 folg.

100. Bemerkung. Wenn ein zu höhern Potenzen zu erhebendes Polynomium vorkömmt, so ist es selten der Fall, daſs die Glieder desselben ganz unabhängig von einander da stehen, wie wir eben annehmen; hingegen sind sie fast immer nach Potenzen einer Hauptgröſse geordnet. Obgleich nun hier dieselben Regeln für die Potenz-Erhebung gelten: so ergibt sich doch in der Entwickelung eine gröſsere Bequemlichkeit. Wir können nämlich dann mit Leichtigkeit die sämmtlichen Glieder angeben, die in der entwickelten Potenz gleiche Potenzen der Hauptgröſse enthalten.

Soll z. B. $(a+bx+cx^2+dx^3+)^n$ gesucht werden, so fragen wir nach den Gliedern, in welchen die erste, zweite und jede folgende Potenz von x vorkömmt.

101. Obgleich nun das nach den Potenzen von x geordnete Polynomium auf mehrfältige Weise verschieden seyn kann: so lassen sich doch alle die Fälle, wo die Potenzen von x so auf einander folgen, dafs die Exponenten eine arithmetische Progression bilden, alle auf den einzigen zurückführen, da das Polynomium die Form $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}$ hat. Allerdings könnte das Polynomium, wenn es auch die auf einander folgenden ganzen Potenzen von x enthält, doch mit einer andern Potenz anfangen, wie $Ax^\alpha + Bx^{\alpha+1} + Cx^{\alpha+2} + Dx^{\alpha+3} + \text{etc.}$; aber dann kann ja man dafür setzen: $x^\alpha (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.})$ und es so auf das vorige zurückführen. Eben das könnte geschehen, wenn die Exponenten von x nicht um 1 verschieden wären, aber doch eine gewöhnliche arithmetische Progression bildeten, wie $Ax^\alpha + Bx^{\alpha+\beta} + Cx^{\alpha+2\beta} + Cx^{\alpha+3\beta} + \text{etc.}$, welches $= x^\alpha (A + Bx^\beta + Cx^{2\beta} + Dx^{3\beta} + \text{etc.}$ ist, und wenn man $x^\beta = z$ setzt, in der Form $x^\alpha (A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.})$ leichter zu einer Potenz erhoben wird. Alle diese Fälle sind daher in dem einen enthalten, da das Polynomium nach den Potenzen von x so fortgeht, dafs alle ganzen Zahlen als Exponenten vorkommen, und ein von x unabhängiges Glied vorhanden ist.

102. Aufgabe. **Ein nach den Potenzen von x geordnetes Polynomium**, worin die ganzen Potenzen von x nach der Ordnung vorkommen, **zur n^{ten} Potenz zu erheben**, d. i. anzugeben, wie jedes Glied, worin eine bestimmte Potenz von x vorkömmt, gebildet wird.

Auflösung. Es sey $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 + \text{etc.}$ das zur n^{ten} Potenz zu erhebende Polynomium; dann findet man die Glieder nach der Ordnung auf folgende Weise.

1. Das Glied, welches gar kein x enthält, kann aus keinen andern Gliedern, als aus den von x un-

abhängigen gebildet werden: es wird also hier a, n Mal als Factor gesetzt, oder es ist $= a^n$.

2. Das Glied, worin die erste Potenz von x vorkommen soll, läfst sich nicht anders bilden, als indem man das Glied bx, als Factor setzt, alle $(n - 1)$ übrigen Factoren aber aus dem von x unabhängigen Gliede hernimmt, oder, da ein Platz mit bx besetzt ist, alle übrigen $(n - 1)$ Plätze mit a besetzt. Diese n Gröfsen, unter welchen $(n - 1)$ gleiche sind, lassen sich n Mal permutiren, also ist dieses Glied vollständig $= n \cdot a^{n-1} bx$.

3. Um x^2 aus den Gliedern unserer gegebnen Gröfse zu erhalten, kann man entweder cx^2 nehmen und alle $(n - 1)$ übrigen Plätze mit a besetzen, wo dann n die Permutationszahl ist; oder man kann bx zweimal als Factor setzen, und die übrigen $(n - 2)$ Plätze mit a besetzen, und dann sind $(n - 2)$ gleiche und zwei wiederum gleiche Gröfsen, die $\frac{n \cdot (n - 1)}{1 \cdot 2}$ Permutationen erlauben. Dieses Glied ist also

$$= na^{n-1} cx^2 + \frac{n \cdot (n - 1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 x^2.$$

4. Da die Zahl 3 aus Zusammensetzung so entstehen kann, dafs man entweder 3 selbst, oder $1 + 2$, oder $1 + 1 + 1$ nimmt, so kann x^3 hier entstehen, entweder indem man den einen Factor dx^3, in welchem x^3 vorkömmt, nimmt, und alle übrigen $(n - 1)$ Plätze mit a besetzt; oder indem man die Glieder $bx \cdot cx^2$ als Factoren setzt, alle übrigen $(n - 2)$ Plätze aber mit a besetzt; oder indem man drei Plätze mit bx, die übrigen $(n - 3)$ Plätze mit a besetzt. Fügt man die gehörigen Permutationszahlen bei, so ist also dieses Glied $= n \cdot a^{n-1} dx^3 + n \cdot (n - 1) a^{n-2} bcx^3 + \frac{n \cdot (n - 1)(n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 x^3$.

5. Um irgend eines der folgenden Glieder, zum Beispiel das zu finden, welches x^7 enthält, überlegt man, daſs die 7 auf 15fache Weise (§. 92.) als Summe ganzer Zahlen entstehen, also x^7 auf eben so mannigfaltige Weise ein Produkt von Potenzen mit ganzen Exponenten seyn kann. Die 7 nämlich entsteht aus einem Theile 7;
aus zwei Theilen 1,6; 2,5; 3,4;
aus drei Theilen 1,1,5; 1,2,4; 1,3,3; 2,2,3;
aus vier Theilen 1,1,1,4; 1,1,2,3; 1,2,2,2;
aus fünf Theilen 1,1,1,1,3; 1,1,1,2,2;
aus sechs Theilen 1,1,1,1,1,2;
aus sieben Theilen 1,1,1,1,1,1,1.

Da nämlich das Glied hx^7 schon selbst die 7te Potenz bringt, so müssen alle $(n-1)$ übrigen Plätze mit a besetzt werden, und n ist dann der Coefficient. Ferner geben die Produkte $bx.gx^6$; $cx^2.fx^5$; $dx^3.ex^4$; die 7te Potenz, und da nun zwei Plätze besetzt sind, so kömmt noch a^{n-2} zu Besetzung der $(n-2)$ übrigen Plätze vor. Diese Produkte bekommen den Coefficienten $n.(n-1)$, weil auſser den $(n-2)$ gleichen Gröſsen, 2 ungleiche vorkommen. Den Zusammensetzungen aus drei entsprechen die Produkte $bx.bx.fx^5$; $bx.cx^2.ex^4$; $bx.dx^3.dx^3$; $cx^2.cx^2.dx^3$; denen nun a^{n-3} zu Besetzung der $(n-3)$ noch offenen Plätze beigefügt wird; der Coefficient ist $= n.(n-1)(n-2)$, bei den Gliedern die auſser a^{n-3} drei ungleiche Factoren enthalten, aber $= \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2}$ bei denen, wo derselbe Factor zwei Mal vorkömmt. Auf gleiche Weise findet man alle übrigen, und das ganze Glied ist Folgendes: $na^{n-1}.hx^7$.

$$+n.(n-1).a^{n-2}x^7\left\{bg+cf+de\right\}$$

$$+n.(n-1)(n-2)a^{n-3}x^7\left\{\frac{b^2f}{1.2}+bce+\frac{bd^2}{1.2}+\frac{c^2d}{1.2}\right\}$$

$$+n.(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4}x^7\left\{\frac{b^3.e}{1.2.3}+\frac{b^2cd}{1.2}+\frac{bc^3}{1.2.3}\right\}$$

$$+n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).a^{n-5}x^7\left\{\frac{b^4d}{1.2.3.4}+\frac{b^3c^2}{1.2.3.1.2}\right\}$$

$$+n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)a^{n-6}x^7.\frac{b^5c}{1.2.3.4.5}$$

$$+n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)a^{n-7}x^7.\frac{b^7}{1.2.3.4.5.6.7}.$$

Ginge der Exponent von x in dem verlangten Gliede über n hinaus: so würden manche Theile dieses Gliedes gar kein a enthalten, und man könnte auch nur diejenigen Zerlegungen des Exponenten gebrauchen, die nicht aus mehr als n Theilen bestehen. Man würde indeſs, wenn man mit den Zerlegungen weiter ginge, schon durch die Formel selbst zurecht gewiesen werden, indem die wegfallenden Glieder den Factor Null erhielten.

Wäre z. B. in unsrer eben geführten Rechnung $n=4$ oder nur die vierte Potenz zu suchen, so könnte man in dem Gliede, welches x^7 enthält, die Zerlegungen der 7 in mehr als vier Theile nicht gebrauchen; sie haben auch alle den Factor $(n-4)$ der jetzt $=0$ ist, und fallen also von selbst weg; das Glied dagegen, worin a^{n-4} vorkam, ist jetzt dasjenige, was gar kein a enthält, indem schon alle vier Plätze mit andern Gröſsen besetzt sind, und $a^0=1$ wird.

103. Um diese Regeln nun auch auf weniger leichte Fälle anzuwenden, setze ich einige Beispiele her.

1. Es sei $(ax^2+bx^4+cx^6+dx^8+ex^{10})^5$ die Potenz eines mit der zehnten Potenz sich endigenden Polynoms, zu suchen. Ich setze dafür

$$x^{10}.(a+bx^2+cx^4+dx^6+ex^8)^5$$

und finde nun die ersten Glieder

$$=x^{40}\left\{a^5+5a^4bx^8+5a^4cx^4+\text{etc.} \atop +\frac{5.4}{1.2}a^3b^2x^4+\right\}$$

Um ein höheres Glied, z. B. das zu finden, wo in dem eingeschlossenen Factor x^{20} vorkömmt, muſs man zwar wieder die Zerlegungen der 20, aber nur in solchen Zahlen suchen, die in der Reihe als Exponenten von x vorkommen. Da nun das höchste Glied x^8 ist, so kann man weder 20 als unzusammengesetzte Zahl, noch irgend eine Zerlegung in zwei Theile, deren einer ja allemal mehr als 10 betragen würden, gebrauchen. Von den Zerlegungen der 20 in drei Theile ist nur

4,8,8 und 6,6,8

hier zu gebrauchen. Von den Zerlegungen in vier Theile sind nur fünfe zu gebrauchen; denn wenn man alle Zusammensetzungen der 20 aus vier geraden Zahlen sucht, (weil keine ungerade Potenzen von x vorkommen), so sind die hier eingeklammerten unbrauchbar:

(2,2,2,14; 2,2,4,12; 2,2,6,10)
2,2,8,8; (2,4,4,10); 2,4,6,8;
2,6,6,6; 4,4,4,8; 4,4,6,6.

Endlich von den Zerlegungen in fünf Theile sind nur fünf zu gebrauchen, wie die Darstellung aller zeigt:

(2,2,2,2,12; 2,2,2,4,10); 2,2,2,6,8; 2,2,4,4,8; 2,2,4,6,6;
2,4,4,4,6; 4,4,4,4,4.

Das Glied, welches x^{20} enthält, ist also

$$=5.4.3.a^2x^{20}\left\{\frac{ce^2}{1.2}+\frac{d^2e}{1.2}\right\}+5.4.3.2.a.x^{20}\left\{\frac{b^2e^2}{1.2.1.2}+bcde+\frac{bd^3}{1.2.3}+\frac{c^3e}{1.2.3}+\frac{c^2d^2}{1.2.1.2}\right\}$$

$$+5.4.3.2.1.x^{20}\left\{\frac{b^3.de}{1.2.3}+\frac{b^2c^2e}{1.2.1.2}+\frac{b^2cd^2}{1.2.1.2}+\frac{bc^3d}{1.2.3}+\frac{c^5}{1.2.3.4.5}\right\}$$

Wenn Anfänger es leichter finden, die Zusammensetzungen aus allen niedrigern Zahlen zu suchen, so daſs hier z. B. nicht die ungeraden ausgeschlossen werden, so erhielte man das dadurch, daſs man hier $x^2=z$ setzte.

2. Es sei $a+bx^{\frac{1}{4}}+cx^{\frac{3}{4}}+dx+ex^{\frac{5}{4}}+\ldots)^n$

zu suchen: so setzt man lieber $x^3 = z$ und sucht nun $(a + bz + cz^2 + \text{etc.})^n$.

Es sei $(a + bx^4 + cx^8 + dx^{12} + ex^{16} + fx^{20} + gx^{24} + \text{etc.})^{10}$ zu bestimmen. Will man hier irgend ein Glied haben, so erhellt zuerst, daſs nur die Potenzen von x vorkommen, deren Exponenten durch 4 theilbar sind, und das Glied, welches x^{16} enthält, würde nun durch die Zerlegung der 16 in alle durch 4 theilbare Zahlen bestimmt, welche sind: 16; 4,12; 8,8; 4,4,8; 4,4,4,4; das gesuchte Glied also ist:

$$= \Big\{ 10.a^9 e + 10.9.a^8.\left[bd + \frac{c^2}{1.2}\right] + 10.9.8 a^7 \frac{b^2 c}{1.2} + 10.9.8.7.a^6.\frac{b^4}{1.2.3.4} \Big\} x^{16};$$

Das Glied mit x^{24} würde

$$= x^{24} \Big\{ 10.a^9.g + 10.9.a^8 \left[bf + ce + \frac{d^2}{1.2}\right] + 10.9.8.a^7 \left[\frac{b^2 e}{1.2} + bcd + \frac{c^3}{1.2.3}\right] + 10.9.8.7.a^6 \left[\frac{b^3 d}{1.2.3} + \frac{b^2 c^2}{1.2.1.2}\right] + 10.9.8.7.6.a^5 \left[\frac{b^4 c}{1.2.3.4}\right] + 10.9.8.7.6.5.a^4 \frac{b^6}{1.2.3.4.5.6} \Big\}$$

4. Es sei $\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \text{etc.}\right.$

zur 9ten Potenz zu erheben: so ist dieses

$$= x^9 \Big\{ 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \frac{1}{9}x^8 - \frac{1}{11}x^{10} + \text{etc.} \Big\}^9$$

$$= x^9 \Big\{ 1 - 9.\frac{1}{3}x^2 + \left[9.\frac{1}{5} + 9.8.\frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}}{1.2}\right] x^4,$$

$$-\left[9\cdot\frac{1}{7}+9.8.\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+9.8.7.\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{1.2.3}\right]x^6$$

$$+\left[9\cdot\frac{1}{9}+9.8.\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}{1.2}\right)+9.8.7.\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{1.2}\right.$$

$$\left.+9.8.7.6.\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{1.2.3.4}\right]x^8$$

$$-x^{10}\left[9\frac{1}{11}+9.8.\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}\right)+9.8.7\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}}{1.2}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}{1.2}\right)\right.$$

$$\left.+9.8.7.6.\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{1.2.3}+9.8.7.6.5.\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{1.2.3.4.5}\right]$$

$$+x^{12}\left[9\cdot\frac{1}{13}+9.8\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{11}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}}{1.2}\right)\right.$$

$$+9.8.7\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}}{1.2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}+\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}{1.2.3}\right)$$

$$+9.8.7.6\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}}{1.2.3}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}{1.2.1.2}\right)$$

$$+9.8.7.6.5\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{1.2.3.4}\right)$$

$$\left.+9.8.7.6.5.4.\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^6}{1.2.3.4.5.6}\right]$$

$$-+\text{etc.}\Big\}$$

104. Diese leicht zu übersehenden Regeln reichen in fast allen Fällen aus. Sehr selten mag es vorkom-

men, daſs die Potenzen der Hauptgröſse nicht in der Ordnung einer gewöhnlichen arithmetischen Progression fortgehen, und nur diese Fälle bedürfen noch einer Erörterung, die ich, da sie selten gebraucht wird, kurz fasse.

105. Aufgabe. Es sei das Polynomium $(ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta)$ zur n^{ten} Potenz zu erheben, man verlangt die Regeln zu Bestimmung irgend eines Gliedes, z. B. dessen, worin x^u vorkömmt.

Auflösung. 1. Man sucht alle verschiedenen Zusammensetzungen aus den Zahlen α, β, γ, δ, welche zugleich u als Summe geben, und aus n Theilen zusammengesetzt sind.... Müſste man nämlich $p\alpha + q\beta + r\gamma + s\delta$) nehmen um $= u$ zu erhalten und wäre zugleich $p+q+r+s=n$, so wären p, q, r, s brauchbare Werthe, um ein Glied, worin x^u vorkömmt zu bilden, und alle solche brauchbaren Werthe müssen bestimmt werden.

2. Man macht nun ein Produkt, worin ax^α zur p^{ten} Potenz, bx^β zur q^{ten} Potenz, cx^γ zur r^{ten} Potenz, dx^δ zur s^{ten} Potenz vorkömmt. Und dies thut man für alle brauchbaren Werthe von p, q, r, s.

4. Dem so gefundenen Gliede, das aus n Gröſsen zusammen gefügt ist, unter denen p gleiche $= ax^\alpha$, q gleiche $= bx^\beta$, r gleiche $= cx^\gamma$, s gleiche $= dx^\delta$ sind, fügt man die Permutationszahl

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots\ldots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p \cdot 1 \cdot 2 \ldots q \cdot 1 \cdot 2 \ldots r \cdot 1 \cdot 2 \ldots s}$$

als Coefficienten bei.

Nach ganz ähnlichen Regeln würde man verfahren, wenn man statt unsres Tetranoms eine vieltheiligere Gröſse hätte.

Beispiel. Es sei $(ax^3 + bx^7 + cx^{10} + dx^{14} + ex^{15})$ zur 12ten Potenz zu erheben, man sucht das Glied, worin x^{90} vorkömmt.

Hier mufs $p+q+r+s+t=12$, und zugleich $5p+7q+10r+14s+15t=90$ sein. Wenn man hier alle Fälle darstellte, die der ersten Gleichung entsprechen, und daneben setzte, was $5p+7q+10r+14s+15t=v$ ergibt, so würde allerdings erhellen, welche Werthe man gebrauchen kann; aber dies Verfahren wäre sehr weitläufig und läfst sich sehr abkürzen. Aus der letzten Gleichung erhellt, dafs um unser Glied zu finden t nie gröfser als 6 werden kann, da $6.15=90$ ist; aber wäre $t=6$, so müfsten die übrigen vier Gröfsen auch noch 6 ausmachen, und dadurch würde der Werth der zweiten Gleichung viel zu grofs. Selbst $t=4$ ist unbrauchbar, denn dann müfsten $p+q+r+s=8$ seyn, und selbst wenn man das nimmt, was in der zweiten Gleichung am wenigsten gibt, $p=8$, so würde $5p+15t=100$. also kann t nicht gröfser als 3 seyn, und der einzige Werth der übrigen Gröfsen, der, dabei brauchbar ist, wird $p=9$, $q=0$, $r=0$, $s=0$, $t=3$, wodurch $5p+15t=90$ wird.

Für $t=2$ mufs
$$p+q+r+s=10$$
$$5p+7q+10r+14s=60$$
seyn. Es erhellt leicht, dafs s höchstens $=1$ seyn kann, da aber dann für $p=9$, die letzte Gleichung 59, für $p=8$, $q=1$ die letzte Gleichung 61 gibt, und alle andern Voraussetzungen mehr geben würden, so kann s nichts anders als $=0$ seyn; wenn $t=2$ ist. In diesen Fällen mufs also $p+q+r=10$ und $5p+7q+10r=60$ seyn, und es kann r nicht über 2 seyn; denn $r=3$ forderte wenigstens $p=7$, wodurch 65 statt 60 herauskäme. Mit $t=2$, $s=0$, $r=2$, kann zusammen gehören $q=3$, $p=5$, dies gibt aber $5p+7q+10r=66$ statt 60, und q kann nicht 3 seyn, $q=2$, $p=6$ gibt 64; also q kann nicht 2 seyn, $q=1$, $p=7$ gibt 62; also q kann nicht 1 seyn, $q=0$, $p=8$ gibt 60, also nur das letzte ist brauchbar; das ist mit $t=2$, $s=0$, $r=2$ kann einzig $q=0$, $p=8$ zusammen gehören.

Wenn man so ausschliefsend nur die Werthe berechnet, die der ersten Gleichung genau und der letzten nahe entsprechen, so ergibt sich folgende Uebersicht der beinahe zutreffenden Werthe, unter denen diejenigen die wirklich brauchbaren sind, wo v genau $=90$ ist.

Werthe von					Zugehörige Summen	Werthe von					Zugehörige Summen
t	s	r	q	p	v	t	s	r	q	p	v
3	0	0	0	9	90(*)	1	0	0	10	1	90(*)
2	1	0	1	8	91	1	0	0	9	2	88
2	1	0	0	9	89	0	3	0	3	6	93
2	0	2	2	6	94	0	3	0	2	7	91
2	0	2	1	7	92	0	3	0	1	8	89
2	0	2	0	8	90(*)	0	2	2	3	5	94
2	0	1	5	4	95	0	2	2	2	6	92
2	0	1	4	5	93	0	2	2	1	7	90(*)
2	0	1	3	6	91	0	2	1	5	4	93
2	0	1	2	7	89	0	2	1	4	5	91
2	0	0	7	3	94	0	2	1	3	6	89
2	0	0	6	4	92	0	2	0	6	4	90(*)
2	0	0	5	5	90(*)	0	1	5	0	6	94
1	2	0	1	8	90(*)	0	1	4	2	5	93
1	2	0	0	9	88	0	1	4	1	6	91
1	1	3	0	7	94	0	1	4	0	7	89
1	1	2	3	5	95	0	1	3	4	4	92
1	1	2	2	6	93	0	1	3	3	5	90(*)
1	1	2	1	7	91	0	1	2	6	3	91
1	1	2	0	8	89	0	1	2	5	4	89
1	1	1	5	4	94	0	1	1	8	2	90(*)
1	1	1	4	5	92	0	1	0	11	0	91
1	1	1	3	6	90(*)	0	1	0	10	1	89
1	1	0	6	4	91	0	0	6	0	6	90(*)
1	1	0	5	5	89	0	0	5	4	3	93
1	0	4	2	5	94	0	0	5	3	4	91
1	0	4	1	6	92	0	0	5	2	5	89
1	0	4	0	7	90(*)	0	0	4	6	2	92
1	0	3	3	5	91	0	0	4	5	3	90(*)
1	0	3	2	6	89	0	0	3	8	1	91
1	0	2	5	4	90(*)	0	0	3	7	2	89
1	0	1	8	2	91	0	0	2	10	0	90(*)
1	0	1	7	3	89	0	0	1	11	0	87

Die mit * bezeichneten sind die einzig brauchbaren.

Wenn wir also die Permutationszahlen nach den bekannten Regeln beifügen, so ist das verlangte Glied

$$= x^{90} \left\{ \begin{aligned} & 66.\, b^{10}c^2 + 27720.\, a^3b^5c^4 + 924\, a^6c^6 + 5940\, a^2b^8cd \\ & + 110880.\, a^5b^3c^3d + 13860\, a^4b^6d^2 + 23760\, a^7bc^2d^2 \\ & + 132\, ab^{10}e + 83160.\, a^4b^5c^2e + 3960\, a^7c^4e \\ & + 110880\, a^6b^3cde + 5940\, a^8bd^2e + 16632.\, a^5b^5e^2 \\ & + 2970\, a^8p^2e^2 + 220\, a^9e^3. \end{aligned} \right\}$$

So erhellt wenigstens, wie man jedes Glied finden kann, wenn gleich die Schwierigkeiten bei diesem Falle viel größer sind, als bei den vorigen Fällen.

106. Anmerkung. Es wäre hier nun wohl der Ort, um etwas von den Bezeichnungen zu sagen, deren Hindenburg und andre Mathematiker sich bei der Entwickelung der Potenzen eines Polynoms bedient haben. Aber da die Schriftsteller so wenig gleichförmig hierin sind, und keine Bezeichnung sich bis jetzt einen solchen Beifall erworben hat, daß man sie als wirklich allgemein angenommen ansehen könnte: so trage ich Bedenken hier mich umständlich darauf einzulassen. Hindenburg's Bezeichnung findet man in dem von ihm herausgegebenen Werke: der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis (Leipzig 1796), wo er S. 212. und an andern Stellen umständlich hiebei verweilt.

Am angemessensten scheinen mir indeß die von Thibaut (Grundriß der Allgem. Arithmetik. 1ter Theil. Götting. 1809.) gebrauchten Bezeichnungen, von denen ich folgendes bemerken will.

Die Binomial-Coefficienten der nten Potenz bezeichnet er mit ${}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}$, ${}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}$, ${}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}$ u. s. w., wo die oben gerade über stehende Zahl anzeigt, zu welcher Potenz des zweiten Gliedes (des x) der Coefficient gehört. Hiernach ist

$$(a+x)^n = a^n + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\, a^{n-1}.\, x + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\, a^{n-2}.\, x^2 + + \ldots$$

$$+ {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}\, a^{n-r} x^r + \text{etc.}$$

und es ist ${}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} = n$; ${}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} = \frac{n.(n-1)}{2}$;

$$^{r}_{n}\mathfrak{B} = \frac{n.(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ r}.$$

Er bezeichnet ferner mit $^{r}\overset{m}{C}$ alle Combinationsformen, die sich aus m Gröfsen so bilden lassen, daſs die Summe ihrer Zeiger $=$ r werde. Nehme ich nämlich die beigefügten Potenzen von x sogleich als Zeiger, so lassen sich aus der Reihe von Gröſsen

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$$

Combinationen der 7ten Classe (das heiſst, in denen die Zahl der Gröſsen $= 7$ ist,) zur Summe 5, folgende bilden: $a^6.f$; a^5be; a^5cd; a^4b^2d; a^4bc^2; a^3b^2c; a^2b^5; die sich aus den Zerfällungen der 5 in Theile leicht finden lassen.

Alle diese Formen sind also gemeint, wenn man $^{5}\overset{7}{C}$ schreibt. Setzt man diesem Zeichen noch ein $\mathfrak{p}$ vor, nämlich $\mathfrak{p}^{5}\overset{7}{C}$, so heiſst das, jede der angeführten Combinationsformen soll mit der Anzahl ihrer Permutationen multiplicirt, und so die Summe aller genommen werden. So ist also $(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.})^m$

$$= a^m + \mathfrak{p}^{1}\overset{m}{C}x + \mathfrak{p}^{2}\overset{m}{C}x^2 + \mathfrak{p}^{3}\overset{m}{C}x^3 + \text{etc.}$$

Bei den hier vorzutragenden Untersuchungen werden wir fast ganz ohne künstliche Zeichen ausreichen, und es mag daher hier dieses genügen.

107. Bemerkung. Man könnte hier noch Anleitung fordern, wie aus einem Gliede der entwickelten Potenz des Polynoms sich das folgende finden lieſse, und mehr ähnliche Aufgaben aufstellen. Hindenburg in dem oben schon erwähnten Buche, und Kramp (arithmetique universelle. Cologne 1808.) geben dergleichen Probleme mit ihren Auflösungen, aber es scheint mir für den Anfänger am rathsamsten, mit Beiseitsetzung aller weitläufigern Rechnungen, nur erst die Hauptsache ins Auge zu fassen; daher entschuldige ich mich nicht darüber, daſs hier nicht alles allenfalls Brauchbare vorkömmt.

Nur folgender Satz, der die Summe der Binomial-Coefficienten betrifft, verdient hier noch einen Platz, da wir seiner nachher bedürfen.

108. Lehrsatz. Alle Binomial-Coefficienten der n^{ten} Potenz, wenn man die 1 als Coefficienten der n^{ten} Potenz des ersten und der n^{ten} Potenz des zweiten Gliedes mit dazu rechnet, geben zur Summe 2^n.

Beweis. Da $(a+x)^n = a^n + n.a^{n-1}x + \frac{n.(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}x^3 + \ldots$ $\ldots + n.ax^{n-1} + x^n$: so wird, wenn man $a = x = 1$, setzt,

$$2^n = 1 + n + \frac{n.(n-1)}{1.2} + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots$$
$$\ldots \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-(r-1))}{1.2.3\ldots r} + \ldots + n + 1.$$

109. Da diese Reihe aus zwei ganz gleichen Hälften besteht, in denen es für n gleich einer geraden Zahl ein mittleres Glied, welches nur einmal vorkömmt, für n gleich einer ungeraden Zahl lauter gleiche Paare von Gliedern gibt: so ist auch, wenn man die Reihe in der Mitte abbricht

$$2^{n-1} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots + \left[\frac{n.(n-1)\ldots(\frac{1}{2}n+1)}{1.2\ldots\frac{1}{2}n}\right]\frac{1}{2},$$

für ein gerades n; oder

$$2^{n-1} = 1 + n + \frac{n.(n-1)}{1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(\frac{1}{2}(n-1)+2)}{1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)}$$ für ein ungerades n.

Beispiel. Es sei $n = 12$, so ist

$$2^{11} = 1 + 12 + \frac{12.11}{1.2} + \frac{12.11.10}{1.2.3} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} + \left\{\frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}\right\}\frac{1}{2},$$ weil das letzte Glied das nur einmal vorkommende Mittelglied ist; $2^{11} = 2048 = 1 + 12 + 66 + 220 + 495$
$$+ 792 + \frac{924}{2}$$

Es sei n = 13, so ist

$$2^{12} = 1 + 13 + \frac{13.12}{1.2} + \frac{13.12.11}{1.2.3} + \frac{13.12.11.10}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5} + \frac{13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5.6}$$

$$2^{12} = 4096 = 1 + 13 + 78 + 286 + 715 + 1287 + 1716.$$

Dritter Abschnitt.

Von der Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes für negative und gebrochene Exponenten.

110. Bemerkung. Unsre bisherigen Entwickelungen und Beweise gelten offenbar nur, wenn der Exponent der Potenz, zu welcher das Binom oder Polynom erhoben werden sollen, eine positive, ganze Zahl ist. Alles Bisherige ist auf das Multipliciren der Gröfsen in einander gegründet, und die Regel, jedem Gliede die Anzahl der aus den n vorkommenden Gröfsen möglichen Permutationen als Coefficienten vorzusetzen, fordert unstreitig, dafs n weder ein Bruch noch auch negativ sey.

Wenn n negativ ist, das heifst, wenn man durch fortgesetzte Division auf einen Ausdruck wie

$$\frac{1}{a(+x)^n} = (a+x)^{-n}$$

gekommen ist; oder wenn n ein positiver oder negativer Bruch $= \frac{p}{q}$ ist, das heifst, wenn man durch Zerlegung der Gröfse $(a+x)^p$ in eine Anzahl von q gleichen Factoren zu der q^{ten} Wurzel $= (a+x)^{\frac{p}{q}}$ gekommen ist: so läfst sich von Permutationen nicht mehr reden für eine Anzahl von Gröfsen, die jetzt negativ oder gebrochen müfste angenommen werden.

III. Dennoch gilt der binomische Lehrsatz auch hier, und dieses läſst sich für einzelne Fälle leicht nachweisen.

Denn $\frac{1}{a+x}=(a+x)^{-1}$ gäbe, wenn man $n=-1$ in dem Ausdruck

$$a^n+na^{n-1}x+\frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}x^2+\text{etc.}$$

setzt, $a^{-1}-a^{-2}x+a^{-3}x^2-a^{-4}x^3+-$ etc. und eben das gibt die Division für $\frac{1}{a+x}$.

Die im binomischen Lehrsatz ausgedrückte Formel gilt also für $n=-1$, und wir brauchten nur zu zeigen, daſs sie für die $-(n+1)^{te}$ Potenz gilt, wenn sie für die $-n^{te}$ galt, um einen allgemeinen Beweis der Gültigkeit dieses Lehrsatzes für negative ganze Exponenten zu haben.

112. **Der binomische Lehrsatz für Potenzen, deren Exponent eine negative ganze Zahl ist.** Auch in diesem Falle ist

$$(a+x)^{-n}=a^{-n}+(-n)a^{(-n-1)}x+\left(\frac{-n.(-n-1)}{1\ .\ 2}\right)a^{-(n-2)}x^2$$
$$+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^{(-n-3)}x^3+\text{etc.}$$

Beweis. Wir wollen annehmen, die Entwickelung sei richtig für $-n$ und nun zeigen, daſs sie dann nothwendig richtig ist für $(-n-1)$ als Exponenten.

Bekanntlich erhält man $(a+x)^{-(n+1)}$, wenn man $(a+x)^{-n}$ mit $(a+x)$ dividirt. Drücken wir also $(a+x)^{-(n+1)}$ durch die unbestimmte Reihe

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots.Rx^r+Sx^{r+1}+\ldots.$$

aus, so muſs, da wir für $(a+x)^{-n}$ die Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze als richtig annehmen,

$$\frac{a^{-n} - n.a^{-(n+1)}x + \frac{(-n)(-n-1)}{1\ .\ 2}a^{-(n+2)}x^2 + \text{etc.}}{a+x}$$

$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots + Rx^r + Sx^{r+1} + \ldots$$

seyn. Hieraus folgt, wenn man die ganze Gleichung mit $(a+x)$ multiplicirt:

$$a^{-n} - n.a^{-(n+1)}x + \frac{n.(n+1)}{1\ .\ 2}a^{-(n+2)}x^2 - \frac{n.(n+1)(n+2)\,a^{-(n+3)}x^3}{1.\ 2\ .\ 3}$$

$$+ \ldots \pm \frac{n.(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1\ .\ 2\ \ .\ 3\ \ .\ .\ .\ r}a^{-(n+r)}x^r$$

$$\pm \frac{n.(n+1)\ldots(n+r-1)(n+r)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ .\ .\ r\ \ .\ \ (r+1)}a^{-(n+r+1)}x^{r+1}$$

$$\pm \text{etc.}$$

$$\begin{aligned} &= Aa + Bax + Cax^2 + Dax^3 + \ldots \\ &\quad\ + Ax \ + Bx^2 \ + Cx^3 \ + \ldots \\ &\ldots + (R + Sa)x^{r+1} + \text{etc.} \end{aligned}$$

wo das Glied, welches x^{r+1} enthält, oder das allgemeine Glied aus zwei Theilen besteht, nämlich aus $S.x^{r+1}$ multiplicirt mit a und aus Rx^r multiplicirt mit x.

Die Glieder vor dem Gleichheitszeichen haben $+$, wenn x zu einer geraden Potenz erhoben oder der Exponent eine gerade Zahl ist, dagegen $-$ wenn der Exponent eine ungerade Zahl ist.

Da diese Ausdrücke (so wie §. 25.) Glied für Glied einander gleich seyn müssen, so erhält man Gleichungen genug, um alle unbestimmten Coefficienten A, B. u. s. w. zu finden. Es wird nämlich
$Aa = a^{-n}$;

$$A = a^{-(n+1)};$$

$$Ba + A = -n.a^{-(n+1)};$$

$$B = -a^{-(n+2)}.(n+1);$$

$$Ca + B = \frac{n(n+1)}{1\ .\ 2}a^{-(n+2)};$$

$$C = a^{-(n+3)} . (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{1 . 2} a^{-(n+3)}$$

und in dem allgemeinen Gliede, der Coefficient, der zu x^{r+1} gehört,

$$S = -\frac{R}{a} \mp \frac{n . (n+1)(n+2) \ldots (n+r) a^{-(n+r+1)}}{1 . 2 . 3 \ldots (r+1) a}.$$

Hier erhellt, dafs die ersten Coefficienten ganz so ausfallen, wie sie für die $-(n+1)^{te}$ Potenz nach dem binomischen Lehrsatz ausfallen sollten. Gilt also dieses Gesetz auch noch für R, als den zu x^r gehörigen Coefficienten, der $-(n+1)^{ten}$ Potenz, so ist

$$R = \pm \frac{(n+1)(n+2) \ldots ((n+1)+(r-1))}{1 . 2 \ldots r} a^{(-n+1+r)}$$

und dieses ist positiv, wenn r eine gerade Zahl, negativ wenn r eine ungerade Zahl ist.

Da nun

$$S = -\frac{R}{a} \mp \frac{n(n+1) \ldots (n+r)}{1 . 2 \ldots (r+1)} . \frac{a^{-(n+r+1)}}{a}$$

seyn soll, so ist

$$S = \mp \frac{(n+1)(n+2) \ldots (n+r)}{1 . 2 \ldots r} \left\{ \frac{n}{r+1} + 1 \right\} a^{-(n+r+2)}$$

$$S = \mp \frac{(n+1)(n+2) \ldots (n+r)(n+1+r)}{1 . 2 \ldots r(r+1)} a^{-(n+r+2)}$$

das heifst, auch der Coefficient von x^{r+1} wird in der $-(n+1)^{ten}$ Potenz dem Gesetze des binomischen Lehrsatzes gemäfs, wenn der Coefficient von x^r es war, und dieses Gesetz für alle Coefficienten der $-n^{ten}$ Potenz galt.

Da wir nun gesehen haben, dafs dieses Gesetz für die bei x, x^2, x^3 stehenden Coefficienten immer gilt, und dafs es für alle Coefficienten der -1sten Potenz richtig war, so ist es allgemein richtig.

113. Die Potenz $(a+x)^{-(n+1)}$ muſs also werden

$$= a^{-(n+1)} - (n+1)a^{-(n+2)}x + \frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}a^{-(n+3)}x^2$$

$$- \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{-(n+4)}x^3 + \ldots$$

$$\pm \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+1+(r-1))}{1\,.\,2\ldots r}a^{-(n+1+r)}x^r$$

$$\mp \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+1+r)}{1\,.\,2\ldots(r+1)}a^{-(n+1+r+1)}x^{r+1} \pm \text{etc.}$$

Und hier, so wie in allen Entwickelungen der negativen Potenzen von $(a+x)$ wechseln die Zeichen, indem sie negativ werden, wenn die Anzahl der negativen Coefficienten $-n$, $-n-1$ u. s. w. ungerade ist, positiv, wenn diese Anzahl gerade ist.

Beispiel. $(a+x)^{-6}$ ist $= a^{-6} - 6a^{-7}x + \frac{6.7}{1.2}a^{-8}x^2 - \frac{6.7.8}{1.2.3}a^{-9}x^3$

$$+ \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4}a^{-10}.x^4 - \text{etc.}$$

$$(a-x)^{-2} \text{ ist} = a^{-2} + 2a^{-3}x + 3.a^{-4}x^2 + 4a^{-5}x^3 + 5a^{-6}x^4 + 6a^{-7}x^5 + \text{etc.}$$

114. Bemerkung. Wenn wir einen Ausdruck, $(a+x)$ in zwei gleiche Factoren zerlegen, oder die zweite Wurzel suchen sollen: so sind wir schon durch Betrachtungen, die in den Elementen der Arithmetik vorkommen, darauf vorbereitet, es nicht auffallend zu finden, wenn diese Wurzel sich nicht in endlichen Ausdrücken darstellen läſst, wenn sie, nach den Potenzen von x entwickelt, eine nie abbrechende Reihe bildet. Wir werden an einen solchen Ausdruck, den wir nie ganz entwickeln können, also nur die Forderung machen können, daſs er mit sich selbst multiplicirt uns das $a+x$ so genau richtig gebe, daſs eine Abweichung davon allenfalls erst in den Gliedern

merklich werde, die über die noch mit in die Rechnung gezogenen Potenzen von x. hinaus liegen.

Wenn wir also finden, daſs

$$a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}x - \frac{1}{8}a^{-\frac{3}{2}}x^2 + \frac{1}{16}a^{-\frac{5}{2}}x^3 - \frac{5}{128}a^{-\frac{7}{2}}x^4$$

mit sich selbst multiplicirt gibt

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}a^{-1}x^2 + \frac{1}{16}a^{-2}x^3 - \frac{5}{128}a^{-3}x^4 + \\ + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}a^{-1}x^2 - \frac{1}{16}a^{-2}x^3 + \frac{1}{32}a^{-3}x^4 - \\ - \frac{1}{8}a^{-1}x^2 - \frac{1}{16}a^{-2}x^3 + \frac{1}{64}a^{-3}x^4 - \\ + \frac{1}{16}a^{-2}x^3 + \frac{1}{32}a^{-3}x^4 - \\ - \frac{5}{128}a^{-3}x^4 - \end{aligned}$$

$= a + x$, indem alle folgende Glieder sich aufheben; so werden wir jenen Ausdruck wenigstens in seinen ersten Gliedern als die richtige zweite Wurzel von x ansehen.

Dieser Ausdruck $a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}x - \frac{1}{8}a^{-\frac{3}{2}}x^2 + \text{etc.}$ ist nach dem binomischen Lehrsatz so entwickelt, daſs $n = \frac{1}{2}$ gesetzt ist; wenn wir also beweisen könnten, daſs jenes Wegfallen der folgenden Glieder in dem Produkte durchaus für alle folgenden Glieder gelte, so wäre bewiesen, daſs die nach dem binomischen Lehrsatze entwickelte Reihe auch für $n = \frac{1}{2}$ gültig wäre. Wir können die Betrachtung aber sogleich ganz allgemein fassen.

Lehrsatz. Wenn man eine Reihe $M = a^m + m a^{m-1} x + \frac{m.(m-1)}{1 . 2} a^{m-2} x^2 +$ etc. so bildet, wie es der binomische Lehrsatz für die m^{te} Potenz fordert, und eine Reihe $N = a^n + n . a^{n-1} x + \frac{n.(n-1)}{1 . 2} a^{n-2} x^2$ + etc. so bildet, wie es der binomische Lehrsatz für die n^{ten} Potenz fordert: so gibt das Produkt $M . N$ eine Reihe ganz so gebildet, wie es der binomische Lehrsatz für die $(m+n)^{te}$ Potenz fordert, es mögen m und n welche Zahlen man will bedeuten.

Beweis. Die wirkliche Multiplication gibt folgende Glieder, wo im ersten alle von x unabhängigen, im zweiten alle die, welche die erste Potenz von x enthalten, im dritten alle die, welche die zweite Potenz enthalten, vereinigt sind, u. s. w.

I. a^{m+n};

II. $(m+n) a^{m+n-1} x$;

III. $\left(\frac{m.(m-1)}{1 . 2} + m . n + \frac{n.(n-1)}{1 . 2}\right) a^{m+n-2} x^2$;

IV. $\left(\frac{m.(m-1).(m-2)}{1 . 2 . 3} + \frac{m.(m-1).n}{1 . 2} + \frac{m.n.(n-1)}{1 . 2} + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}\right) a^{m+n-3} x^3$;

V. $\left(\frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)}{1 . 2 . 3 . 4} + \frac{m.(m-1)(m-2).n}{1 . 2 . 3} + \frac{m.(m-1).n(n-1)}{1 . 2 . 1 . 2} + \frac{m.n.(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3 . 4}\right) a^{m+n-4} x^4$.

Der regelmäſsige Fortgang dieser Glieder läſst sich leicht übersehen, und die folgenden lieſsen sich hiernach leicht bilden.

Die nach Vorschrift des binomischen Lehrsatzes für die $(m+n)^{te}$ Potenz gebildete Reihe würde die ersten zwei Glieder genau so, wie sie eben gefunden sind, haben, und es würden in ihr die folgenden so aussehen:

$$\text{III. } \frac{(m+n)(m+n-1)}{1 \,.\, 2} a^{m+n-2} x^2;$$

$$\text{IV. } \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^{m+n-3} x^3;$$

$$\text{V. } \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} a^{m+n-4} x^4$$

und so weiter. Es ist also zu zeigen, daſs die obigen mit diesen einerlei sind.

Nähere Betrachtung des dritten Gliedes. Dieses Glied war, wenn ich die Potenzen von a und x weglasse

$$= \frac{m \,.\, (m-1)}{1 \,.\, 2} + m \,.\, n + \frac{n \,.\, (n-1)}{1 \,.\, 2}$$

$$= \frac{m \,.\, (m-1)}{1 \,.\, 2} + \frac{1}{2} m \,.\, n$$

$$+ \frac{1}{2} m \,.\, n + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}$$

$$= \frac{1}{2} m(m+n-1) + \frac{1}{2} n(m+n-1)$$

$$= \frac{(m+n)(m+n-1)}{1 \,.\, 2}.$$

Nähere Betrachtung des vierten Gliedes:

Erster Theil $= \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$

Zweiter Th. $= \frac{1}{3}\frac{m.(m-1)n}{1.2} + \frac{2}{3}\frac{m.(m-1)n}{1.2}$

Dritter Th. $= + \frac{2}{3}\frac{m.n.(n-1)}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{m.n(n-1)}{1.2}$

Vierter Th. $= \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

Summirt man hier das unter einander gesetzte, so ist das vierte Glied

$$= \frac{m.(m-1)(m+n-2)}{1.2.3} + \frac{2m.n(m+n-2)}{1.2.3} + \frac{n.(n-1)(m+n-2)}{1.2.3}$$

oder:

$$\frac{(m+n-2)}{1.2.3}\left\{m(m-1)+m.n+m.n+n(n-1)\right\}$$

$$= \frac{(m+n-2)}{1.2.3}\left\{m(m+n-1)+n.(m+n-1)\right\}$$

$$= \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1.2.3}$$

Fünftes Glied. Es war

$$= \frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} + \frac{m.(m-1)(m-2)n}{1.2.3}$$

$$+ \frac{m.(m-1)n.(n-1)}{1.2 \quad 1.2} + \frac{m.n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

$$+ \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$

Also;

Erster Theil $= \frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$

Zweiter Th. $= \frac{m.(m-1)(m-2).n}{1.2.3.4} + \frac{3.m(m-1)(m-2)n.}{1.2.3.4}$.

Erster und zweiter Theil $= \frac{m(m-1)(m-2)(m+n-3)}{1.2.3.4}$

$$+ \frac{3.m.(m-1)(m-2).n}{1.2.3.4};$$

Hiezu der dritte Theil $= \frac{3.m(m-1)n.(n-1)}{1.2.3.4}$

$$+ \frac{3.m(m-1)n(n-1)}{1.2.3.4}$$

Die drei ersten Theile $= \frac{m.(m-1)(m-2)(m+n-3)}{1.2.3.4}$

$$+ \frac{m.(m-1).n.3(m+n-3)}{1.2.3.4}$$

$$+ \frac{3m(m-1).n(n-1)}{1.2.3.4}$$

Hiezu der vierte Theil $= \frac{3.m.n.(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}$

$$+ \frac{m.n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}$$

also Summe der vier ersten Theile:

$$= \frac{m.(m-1)(m-2)(m+n-3)}{1.2.3.4} + \frac{m.(m-1).n.3(m+n-3)}{1.2.3.4}$$

$$+ \frac{m.n(n-1).3(m+n-3)}{1.2.3.4} + \frac{m.n.(n-1)(n-2)}{1.2.3.4};$$

Hierzu der fünfte Theil: $=\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$.

Summe aller fünf Theile

$$=\frac{(m+n-3)}{1.2.3.4}\left\{\begin{array}{l} m.(m-1)(m-2)+3.m.(m-1)n \\ +3.m.n(n-1)+n.(n-1)(n-2) \end{array}\right\}.$$

Durch eine ähnliche Zerfällung ist hier der eingeschlossene Theil

$$\begin{array}{l} =m(m-1)(m-2) \\ +m.(m-1)n \quad +2m.(m-1)n \\ \qquad +2m.n(n-1)+m.n(n-1) \\ \qquad\qquad +n(n-1)(n-2) \end{array}$$

$$=(m+n-2)\left\{m(m-1)+2m.n+n(n-1)\right\};$$

und dieses $=(m+n-2)\left\{\begin{array}{l} m(m-1) \\ +m.n+m.n \\ +n.(n-1) \end{array}\right\}$

$$=(m+n-2)(m+n-1)(m+n);$$

das ganze fünfte Glied ist also eben das, was es in der $(m+n)^{ten}$ Potenz seyn würde; die Entwickelung des VI^{ten} und VII^{ten} Gliedes stellt die nebenstehende Tafel dar, und es erhellt, daſs alle folgenden Glieder eben so eine einfachere Darstellung erlauben. Die Zerlegung jedes einzelnen Theiles nämlich, woraus das Glied besteht, läſst sich immer auf eine ganz ähnliche Weise zu Stande bringen, so daſs der eine abgesonderte Theil sich dem vorhergehenden, der andre dem aus dem folgenden hergenommenen anschlieſst*)

*) In Thibaut's allg. Arithm. 1. Th. S. 191. wird dieses ausführlich in Beziehung auf ein allgemeines Glied gezeigt. Hier schien jene Andeutung mir zureichend.

7ttes Gl

$$\frac{-2).n(n-}{3\ .\ 1\ .\ 2}\ \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3\ .\ 4\ .\ 5}$$

$$\frac{(n-1)}{5}$$

$$\frac{(n-2)}{5}+$$

$$\frac{-1)(m+n-}{4\ .\ 5}$$

2)+n(n−1)

)(n−2)

n−2)(n−3)

−3)+n.(n−

n+n−2) {

otenz.

Hierzu der fünfte Theil: $= \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4}$.

Summe aller fünf Theile

$$= \frac{(m+n-3)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} \left\{ \begin{array}{l} m.(m-1)(m-2)+3.m.(m-1)n \\ \quad +3.m.n(n-1)+n.(n-1)(n-2) \end{array} \right\}.$$

Durch eine ähnliche Zerfällung ist hier der eingeschlossene Theil

$$\begin{array}{l} = m(m-1)(m-2) \\ \; + m.(m-1)n \qquad + 2m.(m-1)n \\ \qquad\qquad\qquad + 2m.n(n-1) + m.n(n-1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + n(n-1)(n-2) \end{array}$$

$$= (m+n-2)\{m(m-1)+2m.n+n(n-1)\};$$

$$\text{und dieses} = (m+n-2) \left\{ \begin{array}{l} m(m-1) \\ + m.n + m.n \\ \qquad + n.(n-1) \end{array} \right\}$$

$$= (m+n-2)(m+n-1)(m+n);$$

das ganze fünfte Glied ist also eben das, was es in der $(m+n)^{ten}$ Potenz seyn würde; die Entwickelung des VI^{ten} und VII^{ten} Gliedes stellt die nebenstehende Tafel dar, und es erhellt, daſs alle folgenden Glieder eben so eine einfachere Darstellung erlauben. Die Zerlegung jedes einzelnen Theiles nämlich, woraus das Glied besteht, läſst sich immer auf eine ganz ähnliche Weise zu Stande bringen, so daſs der eine abgesonderte Theil sich dem vorhergehenden, der andre dem aus dem folgenden hergenommenen anschlieſst*)

*) In Thibaut's allg. Arithm. 1. Th. S. 191. wird dieses ausführlich in Beziehung auf ein allgemeines Glied gezeigt. Hier schien jene Andeutung mir zureichend.

7ᵗᵉˢ Gl

—2) . n(n— (n—2) (n—3) (n—4)

3 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5

(n—1)

5

(n—2)

5 +

—1)(m+n—

4 . 5

2)+n(n—1)

)(n—2)

n—2)(n—3)

—3)+n.(n—

n+n—2) {

Potenz

$$n-1)(n-2)(n-3) \over 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{m.n(n-1)\ldots(n-4)}{1.1.2.3.4.5} + \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.2.3.4.5.6}$$

$$-4).n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + m.n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

$$+ n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

$$-2)(n-3)(n-4)\}$$

116. Aus diesem Satze erhellt nun folgendes ganz klar:

1. Wenn man eine Reihe, ganz nach Angabe des binomischen Lehrsatzes, so entwickelte, wie es $(a+x)^n$ für $n = \frac{1}{2}$ fordert, und diese Reihe mit sich selbst multiplicirt: so kömmt, weil hier $n+n=1$ ist, das heraus, was die Entwickelung von $(a+x)^n$ für $n=1$ geben würde, das ist $(a+x)$. Also ist die Reihe, welche der binomische Lehrsatz für $(a+x)^{\frac{1}{2}}$ gibt, die richtige zweite Wurzel von $(a+x)$.

2. Wenn man die Reihe nach dem binomischen Lehrsatze so entwickelt, daſs $(a+x)^n$ für den Werth $n = \frac{1}{3}$ dargestellt werde: so erhält man aus der Multiplication dieser Reihe in sich selbst genau die Reihe, die der binomische Lehrsatz für $(a+x)^m$ geben würde, wenn $m = \frac{2}{3}$ wäre. Und multiplicirt man die letztere Reihe wieder mit der erstern, so bekömmt man genau eben das, was $(a+x)^{m+n}$ entwickelt geben würde, das ist, weil $m+n=1$ ist, man erhält $(a+x)$ selbst. Also gibt die Reihe, welche man nach Anleitung des binomischen Lehrsatzes für $(a+x)^{\frac{1}{3}}$ entwickelt, die wahre dritte Wurzel von $(a+x)$, weil jene Reihe dreimal als Factor gesetzt, $(a+x)$ gibt.

3. Und so erhellt allgemein, daſs $(a+x)^{\frac{m}{n}}$ so entwickelt, wie es der binomische Lehrsatz fordert, wenn der Exponent $= \frac{m}{n}$ gesetzt wird, in der That die n^{te} Wurzel aus $(a+x)^m$ ist, weil jene Reihe n Mal als Factor gesetzt uns zu der Reihe führt, durch welche $(a+x)^m$ ausgedrückt wird.

117. **Lehrsatz.** Die Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze, daſs $(a+x)^n =$

$$= a^n + n a^{n-1} x + \frac{n.(n-1)}{1.2} a^{n-2} x^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} x^3 + \text{etc.}$$

sey, ist auch dann noch richtig, wenn n ein positiver oder negativer Bruch ist.

Der Beweis für positive Brüche ist im Vorigen gründlich entwickelt. Aber auch für negative Brüche gilt eben das, denn da die nach unserm Satze für $(a+x)^{-\frac{m}{n}}$ entwickelte Reihe, n Mal als Factor gesetzt, eben das gibt, was die Entwickelung von $(a+x)^{-m}$ geben würde, die letztere aber die wahre Entwickelung der $(-m)^{\text{ten}}$ Potenz ist: so ist auch jene die wahre Entwickelung der n^{ten} Wurzel von dieser, das ist der $\left(-\frac{m}{n}\right)^{\text{ten}}$ Potenz.

Beispiel: $$(a+x)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} x - \frac{\frac{1}{3}.\frac{2}{3}}{1.2} a^{-\frac{5}{3}} x^2$$

$$+ \frac{\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{5}{3}}{1.2.3} a^{-\frac{8}{3}} x^3 - \frac{\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{5}{3}.\frac{8}{3}}{1.2.3.4} a^{-\frac{11}{3}} x^4 + \text{etc.}$$

$$(a+x)^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} x + \frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{1.2} a^{-\frac{5}{2}} x^2 - \frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{1.2.3} a^{-\frac{7}{2}} x^3$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}}{1.2.3.4} a^{-\frac{9}{2}} x^4 - \text{etc.}$$

118. Diese Reihen dienen, um die höhern Wurzeln leicht zu bestimmen. Es sey die 7te Wurzel aus 200 zu finden. Da $2^7 = 128$ ist: so nehme ich in dem Binom $(a+x)$, $a = 128$, $x = 72$, und finde

$$\sqrt[7]{(128+72)} = 2 + \frac{1}{7}\cdot\frac{72}{64} - \frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}}{2}\cdot\frac{(72)^2}{64.128} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{13}{7}}{1.2.3}\cdot\frac{72}{64}\left(\frac{72}{128}\right)^2$$

Diese Reihe ist zwar convergent, das ist, die folgenden Glieder werden immer kleiner; aber man kann das Abnehmen der Glieder sehr verstärken, wenn man $\sqrt[7]{a}$ dem wahren Werthe der Wurzel näher oder x kleiner nimmt. Die beiden ersten Glieder der eben mitgetheilten Entwickelung geben zusammen $\sqrt[7]{200} = 2,16\ldots$ also ist 2,1 ein viel näherer Werth der Wurzel. Es sey also

$$a = (2,1)^7 = 180,1088541$$

$$\text{also } x = 19,8911459.$$

Dadurch wird also

$$(a+x)^{\frac{1}{7}} = a^{\frac{1}{7}} + \frac{1}{7}\, a^{-\frac{6}{7}} x - \frac{3}{49}.x^2.a^{-\frac{13}{7}} + \frac{13}{343} x^3.a^{-\frac{20}{7}} - \text{etc.}$$

$$(a+x)^{\frac{1}{7}} = 2,1 + \frac{\frac{1}{7}x}{(2,1)^6} - \frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}x^2}{1.2.(2,1)^6(2,1)^7} + \frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{13}{7}x^3}{1.2.3.(2,1)^6(2,1)^{14}}$$

$$- \frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{13}{7}\cdot\frac{20}{7}x^4}{1.2.3.4.(2,1)^6(2,1)^{21}} + \frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{13}{7}\cdot\frac{20}{7}\cdot\frac{27}{7}x^5}{1.2.3.4.5.(2,1)^6(2,1)^{28}}$$

Hier erhellt leicht, wie jedes folgende Glied durch Multiplication des vorhergehenden in $\frac{x}{a^7}$ und in einen neuen Bruch gefunden wird. Man findet so

$$\sqrt[7]{200} = \left.\begin{array}{l} 2,1 \\ +0,03313187 \\ -0,00156817 \\ +0,00010721 \\ -0,00000846 \\ +0,00000072 \\ -0,00000006 \end{array}\right\} = 2,1316631.$$

Man hätte schon aus den zwei ersten Gliedern schliessen können, dass die Wurzel nahe an 2,13 seyn müsse, hätte

man daher, sogleich um eine noch schnellere Annäherung zu bekommen, die vorige Rechnung verlassen und

$$a = (2{,}13)^7 = 198{,}910\ 277\ 864\ 011\ 17.$$
$$x = \quad 1{,}089\ 722\ 135\ 988\ 83$$

gesetzt; dann würde mit Hülfe weniger Glieder

$$\sqrt[7]{200} = \quad 2{,}13$$
$$+0{,}001\ 667\ 017\ 321$$
$$-0{,}000\ 003\ 914\ 009$$
$$+0{,}000\ 000\ 013\ 274$$
$$-0{,}000\ 000\ 000\ 052$$
$$= \quad 2{,}131\ 663\ 116\ 534$$

Vierter Abschnitt.

Beweis der Richtigkeit des polynomischen Lehrsatzes für negative und gebrochene Exponenten.

179. Bemerkung. Es ist unstreitig allemal erlaubt, das Polynom $a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.}$ es bestehe aus so vielen Gliedern, als man will, als ein Binom zu betrachten, indem man a als den ersten Theil und die Summe aller folgenden Glieder als den zweiten Theil des Binoms ansieht. Man könnte daher gewiſs, auch wenn n eine negative ganze Zahl oder irgend ein Bruch ist, die Potenz des Polynoms so entwickeln, daſs man

$$(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})^n =$$
$$a^n + n.a^{n-1}(bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})$$
$$+\frac{n.(n-1)}{1.2}a^{n-2}(bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}(bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})^3$$
$$+\text{ etc.}$$

setzte. Und diese Entwickelung ist keiner Schwierigkeit unterworfen, da das in ihr noch vorkommende

Polynom immer nur zu Potenzen mit positiven, ganzen Exponenten erhoben wird, deren Darstellung nach dem Vorigen leicht geschehen kann.

Es läfst sich aber nun zeigen, dafs diese Entwickelung genau zu eben der Reihe führt, welche wir nach Anleitung des polynomischen Lehrsatzes erhalten würden, wenn wir auch hier den Exponenten, obgleich er negativ oder ein Bruch ist, dort überall (§. 98 folg.) statt n setzten.

120. Obgleich nämlich die Coefficienten

$$n;\ \frac{n.(n-1)}{1.2};\ n.(n-1)$$

und alle ähnlichen, hier nicht mehr die Anzahl von Permutationen, die unter n Gröfsen Statt finden, anzeigen können, da n keine ganze positive Zahl ist: so lassen sich doch diese Producte, die wir nun Polynomial-Coefficienten nennen wollen, auch für solche Werthe von n bilden. Obgleich ferner die im 2ten Abschnitte gebrauchten Ausdrücke, dafs n Plätze besetzt oder n Gröfsen aus der Reihe $a+bx+cx^2+$ etc. hergenommen werden sollen, nicht mehr anwendbar sind; so können wir doch auch hier noch sagen, man solle solche Potenzen der einzelnen Glieder in einander multipliciren, dafs die Summe aller ihrer Exponenten $=n$ sey. So liefse sich auch hier eine Reihe entwickeln, die den Bestimmungen des polynomischen Lehrsatzes ganz gemäfs wäre. Es ist nur die Frage, ob diese Reihe die richtig entwickelte Potenz sey? Wie die Entwickelung jener Regel gemäfs geschehen müsse, zeigen folgende Beispiele. Wenn ich $(a+bx+cx^2+dx^3+\text{etc.})$ nach dem polynomischen Lehrsatze entwickelte, so ergab sich:

$$a^n+na^{n-1}bx+\left(n.a^{n-1}c+\frac{n.(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2\right)x^2$$

$$+\left(n\,a^{n-1}d+n.(n-1)a^{n-2}bc+\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3\right)x^3$$

$$+\text{ etc.}$$

Nähere Betrachtung des vierten Gliedes:

Erster Theil $= \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$

Zweiter Th. $= \frac{1}{3}\frac{m.(m-1)n}{1.2} + \frac{2}{3}\frac{m.(m-1)n}{1.2}$

Dritter Th. $= + \frac{2}{3}\frac{m.n.(n-1)}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{m.n(n-1)}{1.2}$

Vierter Th. $= \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

Summirt man hier das unter einander gesetzte, so ist das vierte Glied

$$= \frac{m.(m-1)(m+n-2)}{1.2.3} + \frac{2m.n(m+n-2)}{1.2.3} + \frac{n.(n-1)(m+n-2)}{1.2.3}$$

oder:

$$\frac{(m+n-2)}{1.2.3}\left\{m(m-1)+m.n+m.n+n(n-1)\right\}$$

$$= \frac{(m+n-2)}{1.2.3}\left\{m(m+n-1)+n.(m+n-1)\right\}$$

$$= \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1.2.3}$$

Fünftes Glied. Es war

$$= \frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} + \frac{m.(m-1)(m-2)n}{1.2.3}$$

$$+ \frac{m.(m-1)n.(n-1)}{1.2 \cdot 1.2} + \frac{m.n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

$$+ \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$

Also;

Erster Theil $= \frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$

Zweiter Th. $= \frac{m.(m-1)(m-2).n}{1.2.3.4} + \frac{3.m(m-1)(m-2)n}{1.2.3.4}$.

Erster und zweiter Theil $= \frac{m(m-1)(m-2)(m+n-3)}{1.2.3.4}$

$$+ \frac{3.m.(m-1)(m-2).n}{1.2.3.4};$$

Hiezu der dritte Theil $= \frac{3.m(m-1)n.(n-1)}{1.2.3.4}$

$$+ \frac{3.m(m-1)n(n-1)}{1.2.3.4}$$

Die drei ersten Theile $= \frac{m.(m-1)(m-2)(m+n-3)}{1.2.3.4}$

$$+ \frac{m.(m-1).n.3(m+n-3)}{1.2.3.4}$$

$$+ \frac{3m(m-1).n(n-1)}{1.2.3.4}$$

Hiezu der vierte Theil $= \frac{3.m.n.(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}$

$$+ \frac{m.n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}$$

also Summe der vier ersten Theile:

$$= \frac{m.(m-1)(m-2)(m+n-3)}{1.2.3.4} + \frac{m.(m-1).n.3(m+n-3)}{1.2.3.4}$$

$$+ \frac{m.n(n-1).3(m+n-3)}{1.2.3.4} + \frac{m.n.(n-1)(n-2)}{1.2.3.4};$$

so die Rede seyn dürfte, wie bei ganzen Zahlen. So erhalte ich

$$a^n + n.a^{n-1}bx + na^{n-1}cx^2 + na^{n-1}dx^3 +$$

$$+ \frac{n.(n-1)}{1\,.\,2}a^{n-2}b^2x^2 + n.(n-1)bca^{n-2}x^3$$

$$+ \frac{n.(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{n-3}b^3x^3$$

$$+ na^{n-1}ex^4 + n.(n-1)a^{n-2}\left(bd + \frac{c^2}{2}\right)x^4 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}a^{n-3}b^2cx^4$$

$$+ \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^{n-4}b^4x^5 + \text{etc.}$$

Also für $n = \frac{1}{2}$.

$$a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}bx + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}cx^2 + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}dx^3 + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}ex^4$$

$$- \frac{1}{8}a^{-\frac{3}{2}}b^2x^2 - \frac{1}{4}a^{-\frac{3}{2}}bcx^3 - \frac{1}{4}a^{-\frac{3}{2}}bdx^4$$

$$+ \frac{1}{16}a^{-\frac{5}{2}}b^3x^3 - \frac{1}{8}a^{-\frac{3}{2}}c^2x^4$$

$$+ \frac{3}{16}a^{-\frac{5}{2}}b^2cx^4$$

$$- \frac{5}{128}a^{-\frac{7}{2}}b^4x^4$$

$$+ \text{etc.}$$

Die Reihe $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.})^{\frac{1}{2}}$ gäbe also

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \text{etc.}$$

Dagegen gäbe $(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\text{etc.})^{-\frac{1}{2}}$

$$=a^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}bx-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}cx^2-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}dx^3-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}ex^4$$

$$+\frac{3}{8}a^{-\frac{5}{2}}b^2x^2+\frac{3}{4}a^{-\frac{5}{2}}bcx^3+\frac{3}{4}a^{-\frac{5}{2}}bdx^4$$

$$-\frac{5}{16}a^{-\frac{7}{2}}b^3x^3+\frac{3}{8}a^{-\frac{5}{2}}c^2x^4$$

$$-\frac{15}{16}a^{-\frac{7}{2}}b^2cx^4$$

$$+\frac{35}{128}a^{-\frac{9}{2}}b^4x^4$$

also $(1-x+x^2-x^3+x^4-\text{etc.})^{-\frac{1}{2}}$

$$(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\text{etc.}$$

Dritte Abtheilung.

Anwendungen des polynomischen Lehrsatzes.

Erster Abschnitt.

Von der Umkehrung der Reihen.

122. Erklärung. Eine Reihe umkehren, heifst, aus einem nach den Potenzen von x geordneten Werthe von z, einen Ausdruck herleiten, welcher im Gegentheil den Werth von x in einer nach den Potenzen von z geordneten Reihe darstellt.

123. In Ausdrücken, wie $z = ax + bx^2 + cx^3$ ist offenbar z eine von x abhängige Gröfse, die andre Werthe erhält, wenn man für x andre Werthe setzt, wo also aus bestimmten Werthen von x das z, welches ihnen zugehört, kann gefunden werden. Wäre nun aber z gegeben, und man wollte x finden, so wäre dazu jener Ausdruck $z = ax + bx^2 + cx^3 + \text{etc.}$ weniger passend, und man würde zu bequemer Bestimmung des x eine nach Potenzen von z geordnete Reihe fordern.

124. Aufgabe. Es sey $z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + hx^8 + \text{etc.}$; man sucht eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe, die den Werth von x darstellt.

Auflösung. Man findet $x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + Gz^7 + Hz^8 + \text{etc.}$, wenn man den Coefficienten folgende Werthe gibt:

$$A = \frac{1}{a};$$

$$B = -\frac{b}{a}A^2;$$

$$C = -\frac{c}{a}A^3 + \frac{4}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}A^3;$$

$$D = -\frac{d}{a}A^4 + \frac{5}{2}\cdot\frac{2bc}{a^2}A^4 - \frac{6.5}{2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3}.A^4;$$

$$E = -\frac{e}{a}A^5 + \frac{6}{2}\left(\frac{2bd+c^2}{a^2}\right)A^5 - \frac{7.6}{2.3}\cdot\frac{3b^2.c}{a^3}A^5$$
$$+ \frac{8.7.6}{2.3.4}\cdot\frac{b^4}{a^4}A^5;$$

$$F = -\frac{f}{a}A^6 + \frac{7}{2}\cdot\left(\frac{2be+2cd}{a^2}\right)A^6 - \frac{8.7}{2.3}\cdot\left(\frac{3b^2d+3bc^2}{a^3}\right)A^6$$
$$+ \frac{9.8.7}{2.3.4}\cdot\frac{4b^3c}{a^4}A^6 - \frac{10.9.8.7}{2.3.4.5}\cdot\frac{b^5}{a^5}A^6;$$

$$G = -\frac{g}{a}A^7 + \frac{8}{2}\cdot\left(\frac{2bf+2ce+d^2}{a^2}\right)A^7 - \frac{9.8}{2.3}\cdot\left(\frac{3b^2e+6bcd+c^3}{a^3}\right)A^7$$
$$+ \frac{10.9.8}{2.3.4}\left(\frac{4b^3d+6b^2c^2}{a^4}\right)A^7 - \frac{11.10.9.8}{2.3.4.5}\cdot\frac{5b^4c}{a^5}A^7$$
$$+ \frac{12.11.10.9.8}{2.3.4.5.6}\cdot\frac{b^6}{a^6}A^7;$$

$$H = -\frac{h}{a}A^8 + \frac{9}{2}\left(\frac{2bg+2cf+2de}{a^2}\right)A^8 -$$

$$-\frac{10.9}{2.3}\left(\frac{3b^2f+6bce+3bd^2+3c^2d}{a^3}\right)A^8$$

$$+\frac{11.10.9}{2.3.4}\left(\frac{4b^3e+12b^2cd+4bc^3}{a^4}\right)A^8$$

$$-\frac{12.11.10.9}{2.3.4.5}\left(\frac{5b^4d+10b^3c^2}{a^5}\right)A^8$$

$$+\frac{13.12.11.10.9}{2.3.4.5.6}\cdot\frac{6b^5c}{a^6}A^8 - \frac{14.13.12.11.10.9}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{b^7}{a^7}A^8;$$

und so die folgenden.

Erläuterung und Beweis. Die Bildung dieser Coefficienten ist ziemlich leicht zu übersehen. Wir wollen denjenigen $= H$ betrachten, welcher die 8te Potenz von z begleitet. Hier kömmt erstlich A^8 in allen Gliedern vor. Zweitens, die aus den Buchstaben b, c, d, e etc. gebildeten Produkte sind als Variationen anzusehen, und zwar: im ersten Gliede aus einer Gröſse zur Summe 8; im zweiten Gliede aus zwei Gröſsen zur Summe 9; im dritten Gliede aus drei Gröſsen zur Summe 10; im vierten Gliede aus vier Gröſsen zur Summe 11; im fünften Gliede aus fünf Gröſsen zur Summe 12; im sechsten Gliede aus sechs Gröſsen zur Summe 13; im siebenten Gliede aus sieben Gröſsen zur Summe 14*). Jedes dieser Produkte hat seinen Permutations-Coefficienten bei sich, und es kömmt a im ersten, a^2 im zweiten, a^3 im dritten Gliede u. s. w. als Divisor vor. Drittens. Die Zahlen-Coefficienten, welche der Summe dieser Produkte vorgesetzt sind, stimmen fast genau überein

*) Nimmt man z. B. im vierten Gliede die Zeiger in eine Summe zusammen, so ist, da b den Zeiger 2, e den Zeiger 5 hat, b^3e eine Variation zur Summe 11.

mit dem Permutations-Coefficienten, einer Verbindung von acht gleichen und so viel andern, unter sich gleichen Gröſsen, als in den Variationen vereinigt sind, nur fehlt allemal die höchste Zahl, z. B. im dritten Gliede von H wäre der Permutations-Coefficient von $K^3.A^8 = \frac{11.10.9}{1.2.3}$, unser Coefficient ist $= \frac{10.9}{2.3}$.

Diese Anleitung den Coefficienten zu bilden, läſst sich leicht auf höhere Potenzen von z anwenden, wenn man zugleich die wechselnden Zeichen beachtet.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes läſst sich in folgender Entwickelung wahrnehmen.

Wenn man den angenommenen Werth für x, in welchem die unbekannten Coefficienten vorkommen,

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}$$

in die gegebne Reihe

$$o = -z + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{etc.}$$

setzt: so muſs die Summe der entstehenden Glieder $=o$ werden, und zwar so, daſs jedes, derselben Potenz von z angehörige, Glied für sich verschwindet (vgl. §. 24. 25.)

$$\begin{array}{lllllll}
-z = -z; & & & & & & \\
ax = & aAz + aBz^2 & + aCz^3 & + aDz^4 & + aEz^5 & + \text{etc.} \\
bx^2 = & & bA^2z^2 + b.2ABz^3 & + b.2ACz^4 & + b.2ADz^5 & + \text{etc.} \\
 & & & + bB^2z^4 & + b.2BCz^5 & + \text{etc.} \\
cx^3 = & & cA^3z^3 & + c.3A^2Bz^4 & + c.3A^2Cz^5 & + \text{etc.} \\
 & & & & + c.3AB^2z^5 & + \text{etc.} \\
dx^4 = & & & d.A^4x^4 & + d.4A^3Bz^5 & + \text{etc.} \\
ex^5 = & & & & eA^5z^5 & + \text{etc.} \\
 & \text{etc.} & & \text{etc.} & &
\end{array}$$

Zur Bestimmung der Coefficienten erhalten wir also folgende Gleichungen:

$Aa - 1 = 0$; $A = \frac{1}{a}$;

$aB + bA^2 = 0$; $B = -\frac{b}{a} A^2$;

$aC + b \cdot 2AB + cA^3 = 0$;

$aC - \frac{2b^2}{a} A^3 + cA^3 = 0$, oder $C = -\frac{c}{a} A^3 + 2\frac{b^2}{a^2} A^3$,

wofür ich, da die folgenden Coefficienten diese Form fordern, setze $C = -\frac{c}{a} A^3 + \frac{4}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} A^3$.

Die vierte Gleichung wird:

$$0 = aD + b(2AC + B^2) + c \cdot 3A^2B + d \cdot A^4;$$

Hier erhellt schon völlig, wie sich diese Gleichungen bilden. Jedesmal nämlich ist a in eine, b in Produkte aus zwei, c in Produkte aus drei der Gröſsen A, B, C etc. multiplicirt, indem b die Glieder bei sich hat, welche aus x^2, c die Glieder, welche aus x^3 entspringen u. s. w. Die aus A, B, C etc. gebildeten Variationen oder Verbindungen*) sind hier in der vierten Gleichung alle die, deren Index-Summe 4 gibt, und sie haben ihre Permutationszahlen bei sich. Entwickelt man eben diese Gleichung weiter, so ist:

1stes Glied $= aD = aD$;

2tes Glied $= b(2AC + B^2) = -\frac{2bc}{a} A^4 + \frac{5 \cdot b^3}{a} A^4$;

*) Ich nenne sie Variationen, da man sie ansehen kann, als hergenommen aus 2 Reihen, 3 Reihen u. s. w., worin immer dieselben Gröſsen A, B, C, D.
A, B, C, D etc.
mit den Zeigern
1. 2. 3. 4 etc.
vorkommen.

3tes Glied $= c.3A^2B = -\frac{3bc}{a}A^4$

4tes Glied $= dA^4 = dA^4$;

also $D = -\frac{d}{a}A^4 + \frac{5}{2}\cdot\frac{2bc}{a^2}A^4 - \frac{5.6}{2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3}A^4$.

Fünfte Gleichung:

$$o = aE + b(2AD + 2BC) + c.(3A^2C + 3AB^2) + d.4A^3B + eA^5.$$

Da hier $2AD = -\frac{2d}{a}A^5 + 5.\frac{2bc}{a^2}A^5 - \frac{5.6}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}A^5$,

$2CB = \qquad + \frac{2bc}{a^2}A^5 - 4.\frac{b^3}{a^3}A^5$

ist, so gibt beider Summe, als zweites Glied:

$$= -\frac{2d}{a}A^5 + 6.\frac{2bc}{a^2}A^5$$

$$-\frac{5.6+4.3}{2.3}\cdot\frac{2b^3}{a^3}A^5,$$

oder $= -\frac{2d}{a}A^5 + 6.\frac{2bc}{a^2}A^5 - \frac{(5+2)6}{2.3}\cdot\frac{2b^3}{a^3}A^5$

und so findet man der fünften Gleichung

1stes Glied $= aE$,

2tes $\quad = -\frac{2bd}{a}A^5 + \frac{6}{2}\cdot\frac{4b^2c}{a^2}A^5 - \frac{6.7.8}{2.3.4}\cdot\frac{b^4}{a^3}A^5$;

3tes $\quad = -\frac{3c^2}{a}A^5 + \frac{6}{2}\cdot\frac{3b^2c}{a^2}A^5$,

4tes $\quad = -\frac{4bd}{a}A^5$,

5tes $\quad = eA^5$.

und folglich

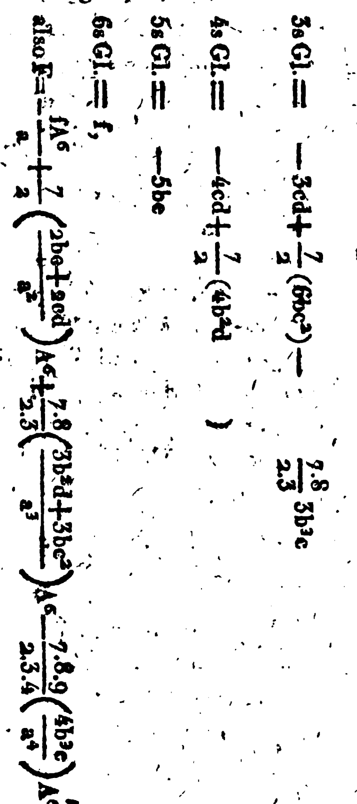
$$E = -eA^5 + \frac{6}{2}\left(\frac{2bd+c^2}{a^2}\right)A^5 - \frac{6.7}{2.3}\left(\frac{3b^2c}{a^3}\right)A^5 - \frac{6.7.8}{2.3.4}\frac{b^4}{a^4}.A^5.$$

Hier zeigt sich schon, wie sich die 6 im zweiten, die 6.7 im dritten Theile zusammensetzt, und eine richtige Aufmerksamkeit zeigt, daſs eben eine solche Zusammensetzung auch für die Folge Statt finde.

Sechste Gleichung.

$$o = aF + b(2AE + 2BD + C^2) + c(3A^2D + 6ABC + B^3)$$
$$+ d(4A^3C + 6A^2B^2) + e(5A^4B) + fA^6;$$

Ich setze hier die entwickelten Glieder her, ohne die Potenzen von A im Zähler und die Potenzen von a im Nenner beizufügen, da diese sich leicht ergeben:



1s Gl. $= aF,$

2s Gl. $= -2be + \frac{7}{2}(4b^2.d + 2bc^2) - \frac{7.8.6}{2.3}b^3c + \frac{7.8.9.10}{2.3.4.5}b^5,$

3s Gl. $= -3cd + \frac{7}{2}(6bc^2) - \frac{7.8}{2.3}3b^3c$

4s Gl. $= -4cd + \frac{7}{2}(4b^2d)$

5s Gl. $= -5be$

6s Gl. $= f,$

also $F = -\frac{fA^6}{a} + \frac{7}{2}\left(\frac{2be+2cd}{a^2}\right)A^6 + \frac{7.8}{2.3}\left(\frac{3b^2d+3bc^2}{a^3}\right)A^6 - \frac{7.8.9}{2.3.4}\left(\frac{4b^3c}{a^4}\right)A^6 + \frac{7.8.9.10}{2.3.4.5}\frac{b^5}{a^5}A^6$

Siebente Gleichung.

$$0 = aG + b(2AF + 2BE + 2CD)$$
$$+ c(3A^2E + 6ABD + 3AC^2 + 3B^2C)$$
$$+ d(4A^3D + 12A^2BC + 4AB^3)$$
$$+ e(5A^4C + 10A^3B^2) + f.6A^5B + g.A^7;$$

also entwickelt, mit Weglassung der A und a,

$$1s = aG,$$

$$2s = \quad -2bf + \frac{8}{2}(4b^2e + 4bcd) - \frac{8.9}{2.3}(6b^3d + 6b^2c^2)$$
$$+ \frac{8.9.10}{2.3.4} 8b^4c - \frac{8.9.10.11.12}{2.3.4.5.6} b^6$$

$$3s = \quad -3ce + \frac{8}{2}(6bcd + 3c^3) - \frac{8.9}{2.3} \cdot (9b^2c^2)$$
$$- \frac{8.9.10}{2.3.4} 3.b^4c,$$

$$4s = \quad -4d^2 + \frac{8}{2} \cdot 8bcd - \frac{8.9}{2.3} \cdot 4.b^3d,$$

$$5s = \quad -5ce + \frac{8}{2} . 5b^2e,$$

$$6s = \quad -6bf,$$

$$7s = g,$$

Es erhellt hier deutlich genug, wie sich die 8 in dem aus zwei Factoren zusammengesetzten Gliede aus $2+6$, $3+5$, zusammensetzt, wie im folgenden $4+5$, $4+6+8$; und $3 = \frac{9}{3}$ den Factor 9 geben und so weiter. Es wird also

$$G = -\frac{g}{a}A^7 + \frac{8}{2}\left(\frac{2bf + 2ce + d^2}{a^2}\right)A^7$$
$$- \frac{8.9}{2.3}\left(\frac{3b^2e + 6bcd + c^3}{a^3}\right)A^7 +$$

$$+\frac{8.9.10}{2.3.4}\left(\frac{4b^3d+6b^2c^2}{a^4}\right)A^7-\frac{8.9.10.11}{2.3.4.5}\left(\frac{5b^4c}{a^5}\right)A^7$$

$$+\frac{8.9.10.11.12}{2.3.4.5.6}\cdot\frac{b^6}{a^6}A^7.$$

Ich will die, nun immer weitläufiger werdende Entwickelung nicht weiter fortsetzen, da sich die Bildung der einzelnen Glieder hier schon wahrnehmen läfst, und so die Richtigkeit der Form auch für die folgenden Glieder erhellt. Ein strenger Beweis sollte freilich die Bildung eines allgemeinen n^{ten} Gliedes aus allen vorhergehenden betrachten; aber dieses würde hier in eine zu grofse Weitläufigkeit führen.

125. Aufgabe. Es sey z durch die Reihe

$$z=ax^\alpha+bx^{\alpha+\beta}+cx^{\alpha+2\beta}+d.x^{\alpha+3\beta}+ex^{\alpha+4\beta}+\text{etc.}$$

ausgedrückt; man sucht eine Reihe, welche x durch z darstellt.

Auflösung. Man bilde eine Reihe, in deren erstem Gliede $z^{\frac{1}{\alpha}}$, im zweiten $z^{\frac{1+\beta}{\alpha}}$, im dritten $z^{\frac{1+2\beta}{\alpha}}$ und so weiter vorkömmt, und bestimme dann in der Reihe

$$x=A.z^{\frac{1}{\alpha}}+Bz^{\frac{1+\beta}{\alpha}}+C.z^{\frac{1+2\beta}{\alpha}}+D.z^{\frac{1+3\beta}{\alpha}}+\text{etc.}$$

die Coefficienten so, dafs sie folgende Werthe erhalten:

$$A=\frac{1}{a^{\frac{1}{\alpha}}}=a^{-\frac{1}{\alpha}};$$

$$B=-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{b}{a}A^{1+\beta};$$

$$C=\frac{1}{\alpha}\left(-\frac{c}{a}A^{1+2\beta}+\frac{\left(\frac{1+2\beta}{\alpha}+1\right)}{2}\frac{b^2}{a^2}A^{1+2\beta}\right);$$

$$D = \frac{1}{\alpha}\left\{-\frac{d}{a}A^{1+3\beta} + \frac{\left(\frac{1+3\beta}{\alpha}+1\right)}{2}\left(\frac{2bc}{a^2}\right)A^{1+3\beta}\right.$$

$$\left. - \frac{\left(\frac{1+3\beta}{\alpha}+1\right)\left(\frac{1+3^2\beta}{\alpha}+2\right)}{2\,.\,3}\cdot\frac{b^3}{a^3}A^{1+3\beta}\right\};$$

$$E = \frac{1}{\alpha}\left\{-\frac{e}{a}A^{1+4\beta}\frac{\left(\frac{1+4\beta}{\alpha}+1\right)}{2}\left(\frac{2bd+c^2}{a^2}\right)A^{1+4\beta}\right.$$

$$-\frac{\left(\frac{1+4\beta}{\alpha}+1\right)\left(\frac{1+4\beta}{\alpha}+2\right)}{2\,.\,3}\left(\frac{3b^2c}{a^3}\right)A^{1+4\beta}$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{1+4\beta}{\alpha}+1\right)\left(\frac{1+4\beta}{\alpha}+2\right)\left(\frac{1+4\beta}{\alpha}+3\right)}{2\,.\,3\,.\,4}\frac{b^4}{a^4}A^{1+4\beta}\right\}$$

wo das Gesetz des Fortgangs erhellt.

Erläuterung. Die Bildung der Glieder ist der in der vorigen Aufgabe sehr ähnlich, nämlich, wenn ich statt A setze $a^{-\frac{1}{\alpha}}, = (a^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}$; so kömmt im Coefficienten E dessen Index $= \frac{1+4\beta}{\alpha}$ ist, dieses a^{-1} zu eben der Potenz vor; die Produkte aus Variationen der a, b, c etc. sind hier im ersten Gliede aus einer Gröfse zur Summe $\alpha+4\beta$ (Index von e), im zweiten aus zwei Gröfsen zur Summe $= (2\alpha+4\beta)$ (da Index von b, $= \alpha+\beta$, von d, $= \alpha+3\beta$ ist), im dritten aus drei Gröfsen zur Summe $= (3\alpha+4\beta)$ u. s. w. gebildet. Die voranstehenden von α und β abhängenden Coefficienten sind eben diejenigen, welche die Permutationszahl für $\frac{1+4\beta}{\alpha}$ gleiche und so viel gleiche

Grössen als in den Variationen vorkommen, ausmachen würden, nur fehlt der höchste, zum Beispiel eine Anzahl von $\left(\frac{1+4\beta}{\alpha}\right)$ gleichen und 4 andern gleichen Grössen, kann so oft permutirt werden, als

$$\frac{\left(\frac{1+4\beta}{\alpha}+4\right)\left(\frac{1+4\beta}{\alpha}+3\right)\left(\frac{1+4\beta}{\alpha}+2\right)\left(\frac{1+4\beta}{\alpha}+1\right)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4}$$

angibt, aber in unserm E fehlt im vierten Gliede der höchste dieser Factoren.

Beweis. Um zuerst die Folge der vorkommenden Potenzen von z zu entdecken, will ich nur die ersten Glieder betrachten, und da noch die Exponenten unbestimmt lassen.

$$x = Az^{\gamma} + Bz^{\gamma+\delta} + Cz^{\gamma+2\delta} + \ldots$$

Da nun $-z + ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\beta} + cx^{\alpha+2\beta} + \ldots$

$= 0$ seyn soll, so ergibt sich $0 =$

$$-z = -z,$$

$$ax^{\alpha} = aA^{\alpha}z^{\alpha\gamma} + \alpha aA^{\alpha-1}Bz^{\alpha\gamma+\delta} + \alpha.aA^{\alpha-1}C.z^{\alpha\gamma+2\delta} +$$
$$+ \alpha(\alpha-1)aA^{\alpha-2}B^2z^{\alpha\gamma+2\delta} +$$

$$bx^{\alpha+\beta} = bA^{\alpha+\beta}.z^{\alpha\gamma+\beta\gamma} + (\alpha+\beta)b.A^{\alpha+\beta-1}B.z^{\alpha\gamma+\beta\gamma+\delta} +$$

$$cx^{\alpha+2\beta} = c.A^{\alpha+2\beta}z^{\alpha\gamma+2\beta\gamma} +$$

Die Glieder sind hier so zusammen geordnet, dass die in $b.x^{\alpha+\beta}$ vorkommende niedrigste Potenz von z, da ihr Exponent offenbar grösser als $\alpha\gamma$ ist, zu dem zweiten Gliede von ax^{α} genommen wird, und so

auch in der Folge fortgefahren wird. Damit aber die so zusammen geordneten Glieder zusammenpassen, muſs $z^{\alpha\gamma}$ mit z, und ebenso $z^{\alpha\gamma+\delta}$ mit $z^{\alpha\gamma+\beta\gamma}$; auch $z^{\alpha\gamma+2\delta}$ mit $z^{\alpha\gamma+\beta\gamma+\delta}$ und mit $z^{\alpha\gamma+2\beta\gamma}$ übereinstimmen; also $\alpha\gamma = 1$; $\gamma = \frac{1}{\alpha}$; $\alpha\gamma+\delta = \alpha\gamma+\beta\gamma$; $\delta = \frac{\beta}{\alpha}$ seyn. Eben diese Werthe sind für die ganze Folge die einzig brauchbaren und die Exponenten von z gehen also so fort, wie es die Auflösung angibt.

Wenn wir dieser Bestimmung gemäſs

$$x = Az^{\frac{1}{\alpha}} + Bz^{\frac{1+\beta}{\alpha}} + Cz^{\frac{1+2\beta}{\alpha}} + Dz^{\frac{1+3\beta}{\alpha}} + \text{etc.}$$

setzen: so ergibt sich folgende Entwickelung:

$$-z = -z,$$

$$ax^{\alpha} = aA^{\alpha}z + \alpha aA^{\alpha-1}Bz^{1+\frac{\beta}{\alpha}} + \frac{\alpha}{1}aA^{\alpha-1}Cz^{1+\frac{2\beta}{\alpha}} +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}aA^{\alpha-2}B^2.z^{1+\frac{2\beta}{\alpha}}$$

$$bx^{\alpha+\beta} = b.A^{\alpha+\beta}z^{1+\frac{\beta}{\alpha}} + (\alpha+\beta)bA^{\alpha+\beta-1}Bz^{1+\frac{2\beta}{\alpha}} +$$

$$cx^{\alpha+2\beta} = cA^{\alpha+2\beta}.z^{1+\frac{2\beta}{\alpha}} +$$

Die folgenden Glieder werden,

in der ersten Reihe $= \alpha . aA^{\alpha-1} D . z^{1+\frac{3\beta}{\alpha}} + \alpha aA^{\alpha-1} E \; z^{1+\frac{4\beta}{\alpha}} +$

$$+ \frac{\alpha.(\alpha-1)}{a \,.\, 2} aA^{\alpha-2} . 2CBz^{1+\frac{3\beta}{\alpha}} + \frac{\alpha.(\alpha-1)}{1 \,.\, 2} aA^{\alpha-2} (2BD+C^2) z^{1+\frac{4\beta}{\alpha}}$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} . aA^{\alpha-3} B^3 . z^{1+\frac{3\beta}{\alpha}} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} aA^{\alpha-3} . 3B^2Cz^{1+\frac{4\beta}{\alpha}}$$

$$+ \frac{\alpha.(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} aA^{\alpha+4} B^4 z^{1+\frac{4\beta}{\alpha}} +$$

in der zweiten Reihe $= (\alpha+\beta) bA^{\alpha+\beta-1} C \; z^{1+\frac{3\beta}{\alpha}} + (\alpha+\beta) bA^{\alpha+\beta-1} D . z^{1+\frac{4\beta}{\alpha}} +$

$$+ \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1 \,.\, 2} b . A^{\alpha+\beta-2} B^2 . z^{1+\frac{3\beta}{\alpha}} \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1 \,.\, 2} bA^{\alpha+\beta-2} 2BCz^{1+\frac{4\beta}{\alpha}} +$$

$$+ \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} b . A^{\alpha+\beta-3} B^3 z^{1+\frac{4\beta}{\alpha}} +$$

in der dritten Reihe $= (\alpha+2\beta) cA^{\alpha+2\beta-1} B. z^{1+\frac{3\beta}{\alpha}} (\alpha+2\beta) cA^{\alpha+2\beta-1} C. z^{1+\frac{4\beta}{\alpha}} +$

$$+ \frac{(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta-1)}{1 \cdot 2} cA^{\alpha+2\beta-2} B^2 z^{1+\frac{4\beta}{\alpha}}$$

in der vierten Reihe $= d. A^{\alpha+3\beta} z^{1+\frac{3\beta}{\alpha}} + (\alpha+3\beta). d. A^{\alpha+3\beta-1} B. z^{1+\frac{4\beta}{\alpha}} +$

in der fünften Reihe $= eA^{\alpha+4\beta} z^{1+\frac{4\beta}{\alpha}} +$

Da hier A den Index $= \frac{1}{\alpha}$; B den Index $= \frac{1+\beta}{\alpha}$, C den Index $= \frac{1+2\beta}{\alpha}$ u. s. w. hat, so erhellt leicht

daſs die aus A, B, C, D etc. gebildeten Variationen bei jeder Potenz von z diejenigen sind, welche eine Index-Summe dem Exponenten von z gleich geben, z. B. bei $z^{1+\frac{3\beta}{\alpha}}$ kommen folgende Variationen vor:

$A^{\alpha+1}D$, wo die Summe der Zeiger $(\alpha-1).\frac{1}{\alpha}+\frac{1+3\beta}{\alpha}$;

$A^{\alpha-2}BC$, wo diese Summe $=(\alpha-2).\frac{1}{\alpha}+\frac{1+\beta}{\alpha}+\frac{1+2\beta}{\alpha}$;

$A^{\alpha-3}.B^3$, wo diese Summe $=(\alpha-3)\frac{1}{\alpha}+3\left(\frac{1+\beta}{\alpha}\right)$

und so weiter, immer $=1+\frac{3\beta}{\alpha}$ ist. Aber diese Variationen enthalten nicht immer gleich viele Gröſsen, sondern sind gebildet aus α Groſsen in den aus der ersten Reihe herstammenden Gliedern, aus $(\alpha+\beta)$ Gröſsen in den aus der zweiten Reihe herstammenden Gliedern u. s. w. Jedes Glied hat seine, auf A, B, C, bezognen Permutationszahlen bei sich.

Die Betrachtung der einzelnen Glieder ergibt nun folgende Gleichungen:

erste: $aA^{\alpha}=1$; $\quad A^{\alpha}=\frac{1}{a}$;

zweite: $\alpha.aA^{\alpha-1}B+b.A^{\alpha+\beta}=0$,

das ist $(\alpha aB+bA^{\beta+1})A^{\alpha-1}=0$;

$$B=-\frac{1}{\alpha}.\frac{b}{a}A^{\beta+1}.$$

dritte: wenn ich den Factor $A^{\alpha-1}$ sogleich überall weglasse:

$$\alpha a C + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2} a A^{-1} B^2 + (\alpha+\beta) b A^{\beta} B + c A^{2\beta+1} = 0;$$

also $C = \frac{A^{1+2\beta}}{\alpha}\left\{-\frac{c}{a} + \frac{\left(\frac{1+2\beta}{a}+1\right)}{2}\frac{b^2}{a^2}\right\}.$

vierte: $o = \alpha a D + \left\{\begin{matrix}(\alpha+\beta) b A^{\beta} C \\ + (\alpha+2\beta) c A^{2\beta} B\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2} a A^{-2}\cdot 2\cdot C \\ + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{1\cdot 2} b\cdot A^{\beta-1} B\end{matrix}\right\} B$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3} a A^{-2} B^3 + d A^{3\beta+1};$$

oder $o =$

$$\alpha a D + \frac{A^{1+3\beta}}{\alpha}\left\{\begin{matrix} -(\alpha+\beta)\frac{bc}{a} + (\alpha+\beta)\frac{\left(\frac{1+2\beta}{\alpha}+1\right)}{2}\frac{b^3}{a^2} \\ -(\alpha+2\beta)\frac{bc}{a}\end{matrix}\right\}$$

$$+\frac{A^{2\beta}}{\alpha}\left\{-\alpha(\alpha-1)c+\alpha(\alpha-1)\left(\frac{\frac{1+2\beta}{\alpha}+1}{2}\right)\frac{b^2}{a} - \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2}\frac{b^2}{a}\right\}B$$

$$+\frac{A^{2\beta}}{\alpha}\left\{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2\cdot 3}\frac{b^2}{a}\right\}B+dA^{1+3\beta};$$

oder $0=$

$$\alpha a D-\frac{A^{1+3\beta}}{\alpha}\left\{(2\alpha+3\beta)\frac{bc}{a}-(\alpha+\beta)\left(\frac{\frac{1+2\beta}{\alpha}+1}{2}\right)\frac{b^3}{a^2}\right\}$$

$$-\frac{A^{2\beta}}{\alpha}B\left\{\alpha(\alpha-1)c-\left[\frac{(\alpha-1)}{2}(1+2\beta-\beta)-\frac{\beta(\alpha+\beta)}{2}\right]\frac{b^2}{a}\right\}$$

$$+\frac{A^{2\beta}}{\alpha}\cdot B\,\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2\cdot 3}\frac{b^2}{a}$$

$$+dA^{1+3\beta};$$

oder o =

$$\alpha a D - \frac{A^{1+3\beta}}{\alpha}\left\{(2\alpha+3\beta)\frac{bc}{a} - \frac{(\alpha+\beta)\left(\frac{1+2\beta}{\alpha}+1\right)}{2}\frac{b^3}{a^2}\right\}$$

$$- \frac{A^{2\beta}}{\alpha}B\left\{\alpha(\alpha-1)c + \left[\frac{(\alpha-1)}{6}(\alpha+3\beta+1) - \frac{\beta(\alpha+\beta)}{2}\right]\frac{b^2}{a}\right\},$$

$$+ dA^{1+3\beta}$$

oder o =

$$\alpha a D - \frac{A^{1+3\beta}}{\alpha}\left\{(\alpha+3\beta+1)\frac{bc}{a}\right\} - \frac{A^{1+3\beta}}{\alpha}\frac{b^3}{a^2}\left\{\frac{(\alpha-1)}{6\alpha} - \frac{(\alpha+\beta)}{2\alpha}\right\}(\alpha+3\beta+1) + dA^{1+3\beta}$$

oder o =

$$\alpha a D - \frac{A^{1+3\beta}}{\alpha}\left\{(\alpha+3\beta+1)\frac{bc}{a} - \frac{b^3}{a^2}\left[\frac{(2\alpha+3\beta+1)(\alpha+3\beta+1)}{2.3.\alpha}\right]\right\} + dA^{1+3\beta},$$

oder endlich

$$D = \frac{A^{1+3\beta}}{\alpha}\left\{-\frac{d}{a} + \frac{\left(\frac{1+3\beta}{\alpha}+1\right)}{2}\cdot\frac{2bc}{a^2} - \frac{\left(\frac{1+3\beta}{\alpha}+2\right)\left(\frac{1+3\beta}{\alpha}+1\right)}{2.3}\frac{b^3}{a^3}\right\}.$$

Die Entwickelung der folgenden Coefficienten läßt sich nach dieser Anleitung weiter ausführen.

126. Die Rechnung wird etwas leichter, wenn man für α und β bestimmte Zahlen annimmt.

Es sey $z = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + \text{etc.}$

so wird $x = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + Ez^9 + \text{etc.}$

wenn man die Coefficienten des letztern Ausdrucks nach der folgenden Entwickelung bestimmt:

$$\begin{array}{llllll}
-z = -z, & & & & & \\
ax = aAz & + aBz^3 & + aCz^5 & + aDz^7 & + aEz^9 & + \text{etc.} \\
bx^3 = & bA^3z^3 & + b.3A^2Bz^5 & + b.3A^2Cz^7 & + b.3A^2Dz^9 & + \text{etc.} \\
 & & & + b.3AB^2z^7 & + b.6ABCz^9 & + \text{etc.} \\
 & & & & + b.B^3z^9 & + \text{etc.} \\
cx^5 = & & cA^5z^5 & + c.5A^4Bz^7 & + c.5A^4Cz^9 & + \text{etc.} \\
 & & & & + c.10A^3B^2z^9 & + \text{etc.} \\
dx^7 = & & & dA^7z^7 & + d.7A^6Bz^9 & + \text{etc.} \\
ex^9 = & & & & eA^9z^9 & + \text{etc.} \\
 & \text{etc.} & \text{etc.} & & &
\end{array}$$

Hier ergibt sich $Aa = 1$; $A = \frac{1}{a}$;

$$aB + bA^3 = 0;\ B = -\frac{b}{a}A^3;$$

$$aC + b.3A^2B + cA^5 = 0;\ C = -\frac{c}{a}A^5 + \frac{6}{2}\,\frac{b^2}{a^2}\,A^5,$$

$$0 = aD + b.3A^2C + b.3AB^2 + c.5A^4B + dA^7;$$

$$D = A^7\left\{-\frac{d}{a} + \frac{5}{2}\cdot\frac{2bc}{a^2} - \frac{2.9}{2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\cdot\frac{2bc}{a^2} - \frac{6.}{2.3}\,9\cdot\frac{b^3}{a^3}\right\};$$

$$D = A^7\left\{-\frac{d}{a} + \frac{8}{2}\cdot\frac{2bc}{a^2} - \frac{8.9}{2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\right\};$$

Ferner,

$$0 = aE + b.3A^2D + b.6ABC + bB^3 + 5cA^4C$$
$$+ 7dA^6B + eA^9$$

also

$$E = A^9\left\{-\frac{e}{a} + \frac{10}{2}\cdot\left(\frac{2bd+c^2}{a^2}\right) - \frac{10.11}{2.3}\cdot\left(\frac{3b^2c}{a^3}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{10.11.12}{2.3.4}\frac{b^4}{a^4}\right\}.$$

127. **Bemerkung.** Aus §. 125. erhellt nun auch, daſs Reihen, in deren erstem Gliede die Hauptgröſse gar nicht vorkömmt, nicht so können umgekehrt werden. Es läſst sich nämlich aus $z = m + ax + bx^2 + cx^3 +$ etc. nicht ein Werth für x darstellen, der nach den Potenzen von z fortginge, sondern, wollte man die Reihe umkehren, so müſste man sie nach Potenzen von $(z - m)$ ordnen. In dieser Reihe wäre das, was wir §. 125, durch α bezeichneten $= 0$, und unsre dortigen Entwickelungen würden also ganz unbrauchbar. Der Grund hiervon läſst sich noch klarer übersehen, wenn man der Reihe

$$z = m + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{etc.}$$

eine Reihe $x = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ etc. gegenüber zu stellen versucht. Dann ergibt jene, wenn man in ihr den angenommenen Werth für x substituirt: $0 =$

$$-z = -z$$

$$m = m$$

$$ax = aA + aBz + aBz^2 + aDz^3 + \text{etc.}$$

$$bx^2 = bA^2 + 2bABz + 2bACz^2 + 2bADz^3 + \text{etc.}$$
$$+ bB^2z^2 + 2bBCz^3 + \text{etc.}$$

$$cx^3 = cA^3 + 3cA^2Bz + 3cA^2Cz^2 + 3cA^2Dz^3 + \text{etc.}$$
$$+ 3cAB^2z^2 + 6cABCz^3 + \text{etc.}$$
$$+ cB^3z^3 + \text{etc.}$$

$$dx^4 = dA^4 + 4dA^3Bz + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Hier sollte A aus einer unendlichen Reihe, die mit der für z gegebnen ganz einerlei Form hat, bestimmt werden, und diese Bestimmung ist unausführbar.

Hätte man dagegen hier eine Reihe gesucht, die x so angäbe, dafs $x = \alpha(z-m) + \beta(z-m)^2 + \text{etc.}$ wäre, so stände dieser Entwickelung keine Schwierigkeit im Wege.

128. Bemerkung. Die Umkehrung der Reihen dient selbst, um noch schwierigere Fragen zu beantworten. Wäre gegeben $z^n = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{etc.}$ und man wollte x^m durch eine nach den Potenzen von z fortgehende Reihe ausdrücken: so könnte das nach ganz ähnlichen Regeln, wie die hier betrachteten, geschehen. Oder hätte man die Gleichung
$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.} = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.}$
und verlangte nun z durch x ausgedrückt, so würde man wieder eine Reihe annehmen, $z = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.}$ und erhielte nun, indem man diese in die gegebenen setzte,

$$o = \begin{cases} -ax & -bx^2 & -cx^3 \\ +\alpha Ax & +\alpha Bx^2 & +\alpha Cx^3 \\ & +\beta A^2x^2 & +2\beta ABx^3 \\ & & +\gamma A^3x^3 + \text{etc.} \end{cases}$$

also $A = \frac{a}{\alpha}$; $B = \frac{b}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}A^2$;

$$C = \frac{c}{\alpha} - \frac{2\beta b}{\alpha^2}A + \left(\frac{2\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}\right)A^3,$$

und so die folgenden. Die vorigen Anleitungen zeigen den Weg, wie man sich auch hier helfen könnte.

Zweiter Abschnitt.

Entwickelung der Exponentialgrößen und der Logarithmen.

129. Bemerkung. Wir haben in den vorigen Untersuchungen die Potenzen immer so entwickelt, daß sie, wie $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n.n-1}{1.2}x^2 +$ etc. nach den Potenzen der Größe fortgingen, welche einen Theil des zur Potenz zu erhebenden Binoms oder Polynoms ausmachte; wir könnten aber die Entwickelung auch so zu ordnen verlangen, daß sie nach den Potenzen des Exponenten n fortginge. Jene Entwickelung diente, um eine bestimmte Potenz solcher Wurzeln darzustellen, die man als von einer Hauptgröße x abhängig dachte; sie diente also, um die Werthe der Potenz, wiefern sie von diesem x abhängen, darzustellen, und folglich auch für verschiedene Werthe von x zu bestimmen; die zweite Entwickelung hingegen würde dienen, zu zeigen, wie die entwickelte Potenz einer immer gleich angenommenen Größe von ihrem Exponenten abhängt.

130. Man pflegt dieses so auszudrücken: bei jener Entwickelung wird die Potenz als Function ihrer Wurzel oder einer die Wurzel bestimmenden Hauptgröße, hier hingegen wird die Potenz als Function des Exponenten angesehen.

Eine Größe heißt nämlich eine Function einer andern, wenn sie von dieser andern abhängt, so daß sie andre und andre Werthe erhält, je nachdem man dieser andern willkührlich verschiedene Werthe gibt. Unstreitig ist also die Potenz zugleich Function der Wurzel und des Exponenten, sie erscheint aber als

Function der Wurzel, wenn man einen immer gleichen Exponenten annimmt, sie erscheint als Function des Exponenten, wenn die Wurzel als immer gleich angesehen wird.

131. Erklärung. Wir nennen die Potenzen Exponentialgröfsen, wenn sie in ihrer Beziehung auf den Exponenten, als Functionen des Exponenten gedacht, also in der Entwickelung nach den Potenzen des Exponenten angeordnet werden.

132. Bemerkung. Dafs eine Gröfse, wie $(1+a)^x$ wohl so entwickelt werden kann, dafs die Reihenfolge der Glieder nach den Potenzen des Exponenten fortgeht, zeigt schon der binomische Lehrsatz, da

$$(1+a)^x = 1 + x.a + \frac{x.x-1}{1.2}a^2 + \frac{x.(x-1)(x-2)}{1.2.3}a^3 \text{ etc.}$$

auch $= 1 + x.a$

$$-\frac{1}{2}xa^2 + \frac{1}{2}x^2a^2$$

$$+\frac{1}{3}xa^3 - \frac{1}{2}x^2a^3 + \frac{1}{6}x^3a^3 + \text{etc.}$$

gibt, und offenbar jedes folgende Glied einen Beitrag zu dem in x, zu dem in x^2 und so weiter, multiplicirten Gliede darbietet. Diese Entwickelung ist aber unbrauchbar, da der gesammte bei x stehende Coefficient mit Hülfe einer unendlichen Reihe gefunden werden müfste, und eben diese Unbequemlichkeit bei allen folgenden eintreten würde.

133. Bemerkung. Um eine bequemere Entwickelung zu finden, dient uns folgende Ueberlegung.

Da, wie wir eben gesehen haben, die Gröfse $(1+a)^x$ nach den Potenzen von x geordnet entwickelt werden

kann, so wollen wir die näher zu bestimmende Reihe

$$(1+a)^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.}$$

dafür annehmen. Diese Reihe wird für jeden Werth von x gelten, und so lange nur a unverändert bleibt, werden die von x unabhängigen Coefficienten, A, B, C etc. gleiche Werthe erhalten, also auch

$$(1+a)^z = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc. seyn.}$$

Setzen wir also $z = 2x$, so ist

$$(1+a)^{2x} = 1 + 2Ax + 2^2 . Bx^2 + 2^3 . Cx^3 + \text{etc.}$$

aber eben das $(1+a)^{2x}$ ist auch

$$= [(1+a)^x]^2 = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots)^2.$$

Die Potenz, deren Exponent $= 2x$ ist, läſst sich also auf eine doppelte Art entwickeln, und dadurch erhält man die Bestimmung der Coefficienten.

134. Lehrsatz. Es ist $(1+a)^x =$

$$1 + Ax + \frac{1}{1.2} A^2x^2 + \frac{1}{1.2.3} A^3x^3 + \frac{1}{1.2.3.4} A^4x^4$$

$$+ \frac{1}{1.2..5} A^5x^5 + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots r} A^rx^r + \text{etc.}$$

wo A eine noch weiter zu bestimmende Gröſse ist, die von a abhängt.

Beweis. Wir wollen zuerst die unbestimmte Reihe

$$(1+a)^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7$$
$$+ Hx^8 + \text{etc.}$$

annehmen, und ihre Coefficienten zu bestimmen suchen. Daſs die Reihe nach der Folge der ganzen Potenzen von x fortgehen, und daſs sie mit 1 anfangen wird, ist schon aus §. 132. zu übersehen.

2. Jene angenommene Reihe bietet uns nun eine doppelte Entwickelung für $(1+a)^{2x}$ dar; denn erstlich muſs dieses

$$=1+2Ax+4Bx^2+8Cx^3+16Dx^4+32Ex^5$$
$$+\ldots+2^r Rx^r+\text{etc.}$$

seyn, und zweitens gleich dem Quadrate der für $(1+a)^x$ angenommenen Reihe, das ist

$$\begin{aligned}=1+2Ax+2Bx^2&+2Cx^3+2Dx^4+2Ex^5+\text{etc.}\\ +A^2x^2&+2ABx^3+2ACx^4+2ADx^5+\text{etc.}\\ &+B^2x^4+2BCx^5+\text{etc.}\end{aligned}$$

Da beide Reihen für jeden Werth von x gleich seyn müssen, so ist nothwendig

$2A=2A$, eine Gleichung, die freilich nichts bestimmt, aber ferner wird

$$4B=2B+A^2;$$
$$8C=2C+2AB$$
$$16D=2D+2AC+B^2$$

und so weiter. Das Gesetz dieser Gleichungen läſst sich leicht übersehen. Gehört nämlich D zur vierten Potenz von x, so kömmt vor dem Gleichheitszeichen D multiplicirt mit 2^4 vor, nach dem Gleichheitszeichen aber finden sich alle Verbindungen zur Zeiger-Summe $=4$, die sich aus zwei der Gröſsen 1, A, B, C etc. bilden lassen, deren Zeiger 0, 1, 2, 3 etc. sind immer mit den gehörigen Permutations-Zahlen multiplicirt.

Löst man diese ersten Gleichungen auf, so ergibt sich $B=\frac{A^2}{2}$;

$$C=\frac{2AB}{6}=\frac{A^3}{6};$$

$$D = \frac{2AC + B^2}{14} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}{14} A^4 = \frac{A^4}{24};$$

Ferner:

$$2^5 . E = 2E + 2AD + 2BC,$$

oder; $15 . E = AD + BC = A^5 \left(1 . \frac{1}{24} + \frac{1}{2} . \frac{1}{6} \right)$

$$= \frac{A^5}{1.2.3.4}(1 + 2)$$

$$E = \frac{A^5}{1.2.3.4.5};$$

Um die Bestimmung der folgenden Coefficienten genauer zu übersehen, wollen wir die Gleichung

$$2^6 . F = (2F + 2AE + 2BD + C^2)$$

so darstellen, daſs sie

$$(2^6 - 2)F = A^6 \left(2 . 1 \frac{1}{1.2.3.4.5} + 2 . \frac{1}{1.2} . \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3} . \frac{1}{1.2.3} \right)$$

oder

$$(2^6 - 2)F = A^6 . \frac{1}{1.2.3.4.5.6} \left(2.6 + 2 . \frac{6.5}{1.2} + \frac{6.5.4}{1.2.3} \right)$$

gibt. Es ist aber

$$2^6 = 2 + 2.6 + 2 . \frac{6.5}{1.2} + \frac{6.5.4}{1.2.3}, \text{ (nach §. 108.)}$$

also $F = \dfrac{A^6}{1.2.3.4.5.6};$

Ebenso finden wir für G,

$$2^7 . G = 2 . G + 2AF + 2BE + 2CD;$$

$$(2^7-2)G=\left(2.\frac{1}{1.2.3.4.5.6}+2.\frac{1}{1.2}.\frac{1}{1.2.3.4.5}\right.$$
$$\left.+2.\frac{1}{1.2.3}.\frac{1}{1.2.3.4}\right)A^7,$$

Da nun

$$\left(2^7=2+2.7+2.\frac{7.6}{1.2}+2.\frac{7.6.5}{1.2.3}\right.$$

und auch, wenn man $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$ zum gemeinschaftlichen Nenner für alle, nach dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder macht,

$$(2^7-2)G=\frac{A^7}{1.2...7}\left(2.7+2.\frac{7.6}{1.2}+2.\frac{7.6.5}{1.2.3}\right)$$ wird:

so ist

$$G=\frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7}.$$

Es erhellt leicht, daſs dieses auch für die folgenden Glieder so fortgeht. Wäre z. B. R der Coefficient des 20ten Gliedes, oder stände R bei x^{20}, so würde, wofern alle vorigen Coefficienten dem Gesetze folgen, R bestimmt durch

$$(2^{20}-2)R=A^{20}\left\{2.\frac{1}{1.2...19}+2.\frac{1}{1.2}.\frac{1}{1.2...18}+\right.$$
$$+2.\frac{1}{1.2.3}.\frac{1}{1.2...17}+2.\frac{1}{1.2.3.4}.\frac{1}{1.2...16}$$
$$+2.\frac{1}{1.2...5}.\frac{1}{1.2...15}+2.\frac{1}{1.2...6}.\frac{1}{1.2...14}$$
$$+2.\frac{1}{1.2...7}.\frac{1}{1.2...13}+2.\frac{1}{1.2...8}.\frac{1}{1.2...12}$$

$$+2.\frac{1}{1.2...9}.\frac{1}{1.2...11}+\frac{1}{1.2...9.10}.\frac{1}{1.2...10}\Big\},$$

oder, wenn alles auf den Nenner $= 1.2.3....20$ gebracht wird,

$$(2^{20}-2)R=\frac{A^{20}}{1.2.3.4...19.20}\Big(2.20+2.\frac{20.19}{1.2}$$

$$+2.\frac{20.19.18}{1.2.3}+2.\frac{20...19.17}{1.2.3.4}$$

$$+2.\frac{20.19...16}{1.2.3.4.5}+2.\frac{20.19...15}{1.2...6}+2.\frac{20.19...14}{1.2...7}$$

$$+2.\frac{20.19...13}{1.2...8}+2.\frac{20.19...12}{1.2...9}+\frac{20.19...11}{1.2...10}\Big),$$

oder da die eingeschlossene Gröſse (§. 108)

$= 2^{20}-2$ ist, $R=\frac{A^{20}}{1.2.3....20}$.

Diese Bestimmung gilt also offenbar für jedes folgende Glied, wenn sie für alle vorhergehenden gültig war, und die Reihe ist folglich allgemein bestimmt.

135. Die ganze Reihe hängt also von A ab, und diese offenbar von der Wurzel $(1+a)$ abhängige Zahl, bleibt in unserer Entwickelung unbestimmt. Wäre sie für irgend ein System gegeben, so hätte in diesem Systeme die Bestimmung aller Potenzen keine Schwierigkeit; aber in einem andern Systeme würde A anders ausfallen, und müſste erst bestimmt seyn, ehe die Potenzen in diesem neuen Systeme berechnet werden könnten.

136. Erklärung. Wir nennen diese Zahl A den Modulus des Potenzensystems; oder da in der eingeführten Sprache, wenn $(1+a)^x = y$ ist, x der

Logarithme von y heifst in dem Logarithmensysteme, worin (1+a) die Grundzahl ist: so heifst A der Modulus dieses Logarithmensystems.

137. Bemerkung. Unter den Potenzensystemen oder Logarithmensystemen, deren wir uns unzählige denken könnten, ist dasjenige vorzüglich merkwürdig, dessen Modulus $A = 1$ ist. Wir nennen es daher das natürliche Logarithmensystem. In diesem Systeme ist also

$$(1+a)^x = 1 + x + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1.2.3.4}x^4 + \text{etc.}$$

und auch die Basis oder Grundzahl dieses Systems wird nun leicht gefunden.

138. Lehrsatz. Die Basis oder Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems ist

$$(1+a) = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2 \ldots 5} + \text{etc.}$$

Beweis. Da unsre Reihe

$$(1+a)^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \text{etc.}$$

für alle Werthe von x gilt, so gilt sie auch für $x = 1$, da aber gibt sie die Grundzahl selbst, zur ersten Potenz erhoben,

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} +$$

Diese Brüche geben entwickelt:

$1 + 1 = 2{,}000000000000.$

$\frac{1}{2} = 0{,}5.$

$$\frac{1}{6} = 0{,}166666666667.$$

$$\frac{1}{24} = 0{,}041666666667.$$

$$\frac{1}{120} = 0{,}008333333333.$$

$$\frac{1}{720} = 0{,}001388888889.$$

$$\frac{1}{5040} = 0{,}000198412698.$$

$$\frac{1}{40320} = 0{,}000024801587.$$

$$\frac{1}{362880} = 0{,}000002755732.$$

$$\frac{1}{3628800} = 0{,}000000275573.$$

$$\frac{1}{39916800} = 0{,}000000025052.$$

$$\frac{1}{479001600} = 0{,}000000002088.$$

$$\frac{1}{6227020800} = 0{,}000000000161.$$

$$\frac{1}{1.2.3.\ldots.14} = \frac{1}{87178291200} = 0{,}000000000011.$$

$$\frac{1}{1.2.3.\ldots.15} = \frac{1}{1307674368000} = 0{,}000000000001.$$

Die Summe dieser Brüche ist $= 2{,}718281828459$, und das ist also, bis auf 12 Decimalstellen genau der Werth der Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems.

139. Aufgabe. Aus der gegebnen Grundzahl eines Logarithmensystems den Modulus des Systems zu finden.

Auflösung. Wenn die Grundzahl $=1+a$, so ist der Modulus

$$A = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{5}a^5 - \text{etc.}$$

Beweis. Wenn man die Potenz $(1+a)^x$ ganz nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, so wie §. 132, aber dann die sämmtlichen Glieder zusammen ordnet, welche die erste Potenz von x enthalten, so erhält man diese Reihe für den Coefficienten von x, wie §. 132. zeigt, und eben dieser war ja, was wir (§. 133 u. folg.) immer A genannt haben.

140. Obgleich die für A gefundene Reihe nur dann durch schnelle Abnahme des Werthes ihrer folgenden Glieder bequem ist, wenn a kleiner als 1 ist, so gibt sie doch wenigstens das Gesetz an, wie A von $(1+a)$ abhängt. Nachher werden wir noch bequemere Bestimmungen erhalten.

141. Bemerkung. Das Bisherige würde dienen, um die Zahl zu finden, die einem bestimmten Logarithmen, vorzüglich im natürlichen Logarithmensysteme, zugehört. Denn wenn e die Grundzahl dieses Systems ist, so haben wir

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \text{etc.}$$

also, wenn $e^x = u$ heißt, die Zahl u, welche dem Logarithmen $= x$ zugehört. Umgekehrt könnten

wir fordern den Logarithmen durch die zugehörige Zahl auszudrücken, und auch dazu sind wir, für das natürliche Logarithmensystem jetzt im Stande.

Denken wir uns nämlich $1+z$ als die Zahl, welche dem Logarithmen x zugehört, oder setzen $\log(1+z) = x$, und nehmen an, wie es nach der Lehre von Umkehrung der Reihen gewiſs möglich ist, daſs

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$$

könne gesetzt werden: so hätten wir nun

$$e^{(Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.})} = 1 + z,$$

und die Entwickelung dieses Ausdrucks lehrt uns die Coefficienten bestimmen.

142. Lehrsatz. Es ist im natürlichen Logarithmensysteme $\log.\ (1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{6}z^6 + \text{etc.}$

Beweis. Da $e^x = 1 + x + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$ war (§. 141.): so ist, wenn ich für x die Reihe

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + Gz^7 + \text{etc.}$$

setze, $e^x =$

$$1 = 1$$

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 +$$

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}A^2z^2 + ABz^3 + ACz^4 + ADz^5 + AEz^6$$

$$+ \frac{1}{2}B^2z^4 + BCz^5 + BDz^6$$

$$+ \frac{1}{2}C^2z^6$$

$$\frac{1}{6}x^3 = + \frac{1}{6}A^3z^3 + \frac{1}{2}A^2Bz^4 + \frac{1}{2}A^2Cz^5 + \frac{1}{2}A^2Dz^6$$

$$+ \frac{1}{2}AB^2z^5 + ABCz^6$$

$$+ \frac{1}{6}B^3z^6$$

$$\frac{1}{24}x^4 = + \frac{1}{24}A^4z^4 + \frac{1}{6}A^3Bz^5 + \frac{1}{6}A^3Cz^6$$

$$+ \frac{1}{4}A^2B^2z^6$$

$$\frac{1}{120}x^5 = \frac{1}{120}A^5z^5 + \frac{1}{24}A^4Bz^6$$

$$\frac{1}{720}x^6 = + \frac{1}{720}A^6z^6$$

Dieses soll $= 1 + z$ seyn, und es ergeben sich daher folgende Gleichungen, die ich, um sie nachher bequem zu benutzen, mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, u. s. w. benennen will.

$$A = 1 = \mathfrak{A};$$

$$B + \frac{1}{2}A^2 = 0 = \mathfrak{B};$$

$$C + \frac{2AB}{2} + \frac{1}{6}A^3 = 0 = \mathfrak{C};$$

$$D + \frac{2AC + B^2}{2} + \frac{3A^2B}{6} + \frac{1}{24}A^4 = 0 = \mathfrak{D};$$

$$E + \frac{2AD + 2BC}{2} + \frac{3A^2C + 3AB^2}{6} + \frac{4A^3B}{24} + \frac{1}{120}A^5 = 0 = \mathfrak{E}.$$

$$F + \frac{2AE + 2BD + C^2}{2} + \frac{3A^2D + 6ABC + B^3}{6}$$
$$+ \frac{4A^3C + 6A^2B^2}{24} + \frac{5A^4B}{120} + \frac{A^6}{720} = 0 = \mathfrak{F}$$
$$G + \frac{2AF + 2BE + 2CD}{2} + \frac{3A^2E + 6ABD + 3AC^2 + 3B^2C}{6}$$
$$+ \frac{4A^3D + 12A^2BC + 4AB^3}{24} + \frac{5A^4C + 10A^3B^2}{120}$$
$$+ \frac{6A^5B}{720} + \frac{1}{5040}A^7 = 0 = \mathfrak{G}.$$

Hier gibt die zweite Gleichung ohne Schwierigkeit $B = -\frac{1}{2}A^2$;

die dritte läfst sich so darstellen

$$0 = C + \frac{2.A\mathfrak{B}}{2} - \frac{1}{3}A^3, \text{ woraus}$$

$$C = +\frac{1}{3}A^3 \text{ folgt, weil } \mathfrak{B} = 0 \text{ ist.}$$

Die vierte läfst sich bequemer so zusammen fassen

$$\mathfrak{D} = 0 = D + \frac{2A\mathfrak{C} + \mathfrak{B}^2}{2} - \frac{3A^2\mathfrak{B}}{3} + \frac{1}{4}A^4$$

Denn es ist

$$\mathfrak{D} = D$$
$$A\mathfrak{C} = AC + A^2B + \frac{1}{6}A^4$$
$$\frac{1}{2}\mathfrak{B}^2 = \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}A^2B + \frac{1}{8}A^4,$$
$$-A^2\mathfrak{B} = -A^2B - \frac{1}{2}A^4$$
$$+\frac{1}{4}A^4 = +\frac{1}{4}A^4$$

$$0 = D + AC + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}A^2B + \frac{1}{24}A^4, \text{ wie oben.}$$

Da nun $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$ so ist $D + \frac{1}{4}A^4 = 0$

$$D = -\frac{1}{4}A^4 = -\frac{1}{4};$$

Eben so ist

$$\mathfrak{E} = 0 = E + \frac{2A\mathfrak{D} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{2} - \frac{3A^2\mathfrak{C} + 3A\mathfrak{B}^2}{3}$$

$$+ \frac{4A^3\mathfrak{B}}{4} - \frac{1}{5}A^5$$

also $E = \frac{1}{5}A^5 = \frac{1}{5};$

Ferner

$$\mathfrak{F} = 0 = F + \frac{2A\mathfrak{E} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \mathfrak{C}^2}{2}$$

$$- \frac{3A^2\mathfrak{D} + 6A\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{B}^3}{3}$$

$$+ \frac{4A^3\mathfrak{C} + 6A^2\mathfrak{B}^2}{4} - \frac{5A^4\mathfrak{B}}{5} + \frac{1}{6}A^6;$$

Da hier alle mittlern Glieder aus den Gröfsen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$, gebildet sind, die sämmtlich $= 0$ werden, so ist

$$F + \frac{1}{6}A^6 = 0; \quad F = -\frac{1}{6}.$$

Und nun erhellt wohl hinreichend das Gesetz der Reihe als allgemein.

143. Lehrsatz. Im natürlichen Logarithmensystem ist

$$\log(1 - z) = -z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{5}z^5 - \text{etc.}$$

Der Beweis würde eben so wie der vorige geführt; aber es ist kaum nöthig, ihn zu führen, da die hier angegebene Reihe sich im §. 142 von selbst ergibt, wenn man dort z negativ setzt.

144. Bemerkung. Bekanntlich ist in jedem Systeme

$$\log \frac{u}{v} = \log u - \log v, \text{ also hier}$$

$$\log \frac{1+z}{1-z} = \begin{cases} z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 + \frac{1}{5} z^5 - \text{etc.} \\ + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{4} z^4 + \frac{1}{5} z^5 + \text{etc.} \end{cases}$$

$$= 2\left(z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{7} z^7 + \text{etc.}\right)$$

Diese Reihe ist bequem, um Logarithmen zu berechnen. Will man zum Beispiel den Logarithmen von 3 berechnen, so nimmt man $\frac{1+z}{1-z} = 3$, also $z = \frac{1}{2}$, und dieser Werth von z gibt die gut convergirende Reihe,

$$\log. 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{128} + \text{etc.}\right)$$

als Werth des natürlichen Logarithmen, den wir nun immer durch log. nat. bezeichnen werden.

145. Die Reihen in §. 142 und 143 gewährten die Vortheile einer schnellen Abnahme der Glieder nur, wenn man die Logarithmen von Zahlen suchte, die nicht viel von 1 verschieden waren, und konnten also nur in diesen Fällen gebraucht werden.

146. Bemerkung. Mit Hülfe dieses natürlichen Logarithmensystems lassen sich nun auch die Logarithmen in andern Systemen, die wir künstliche nennen, berechnen. Nenne ich immer die Grundzahl

des natürlichen Systems $= e$, welches also die im §. 138 berechnete Zahl ist, und bezeichne allgemein mit $(1+a)$ die Grundzahl eines künstlichen Systems, so ist ja $z = e^x$ die Zahl, welche mit dem natürlichen Logarithmen $= x$ zusammengehört, oder es ist $x =$ log. nat. z; und eben so ist $u = (1+a)^v$ die Zahl, die mit dem Logarithmen $= v$ des künstlichen Systems, oder mit dem logarithmus artificialis $= v$ zusammen gehört, oder

$$v = \text{log. artif. } u.$$

und diese lassen sich auf jene zurückführen.

147. Lehrsatz. Wenn die Grundzahl eines künstlichen Logarithmensystems $= 1+a$ ist: so findet man erstlich den Modulus A dieses Systems,

$$A = \text{log. nat. } (1+a);$$

zweitens wird der zur Zahl z gehörige Logarithme in diesem Systeme $= \dfrac{\text{log. nat. } z}{A}$.

Beweis. 1. Wir haben (§. 139.) gesehen, daſs der Modulus, welcher der Grundzahl $= (1+a)$ zugehört,

$$A = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{5}a^5 - \text{etc. ist;}$$

aber eben dieses ist auch (nach §. 142.) der Werth des natürlichen Logarithmen von $(1+a)$, also

$$A = \text{log. nat. } (1+a).$$

2. Wenn $x =$ log. nat. z, oder $e^x = z$,

und $u =$ log. artif. z, oder $(1+a)^u = z$,

so läſst sich die letzte Gleichung auch in $e^{Au} = z$ verwandeln. Denn da, wie wir eben gesehen haben,

$$A = \text{log. nat. } (1+a)$$

also $e^A = (1+a)$ ist,

so ist $(1+a)^u = e^{Au}$ (nach Arithm. §. 112),

also $z = e^x = e^{Au}$, das ist $u = \frac{x}{A}$,

oder log. art. $z = \frac{\text{log. nat. } z}{A} = \frac{\text{log. nat. } z}{\text{log. nat. } (1+a)}$.

Beispiel. In unserm gewöhnlichen Systeme ist $1+a=10$, und ich müßte also log. nat. 10 suchen, um den Modulus dieses Systems zu haben. Ich finde log. nat. 10, indem ich log. nat. 2. und log. nat. 1,25 suche; aus dem erstern nämlich ergibt sich

$$3 \cdot \text{log. nat. } 2 = \text{log. nat. } 8.$$

und es ist log. nat. 8 + log. nat. 1,25 = log. nat. 10.

Um den Logarithmen von 2 zu finden, setze ich

$\frac{1+z}{1-z} = 2$, also $z = \frac{1}{3}$ und nun nach §. 144.

$$\text{log. nat. } 2 = \left\{\begin{array}{l} 0{,}66666667 \\ 0{,}02469136 \\ 0{,}00164609 \\ 0{,}00013064 \\ 0{,}00001129 \\ 0{,}00000102 \\ 0{,}00000010 \\ 0{,}00000001 \end{array}\right\} = 0{,}69314718$$

also log. nat. 8 = 2,07944154

den Logarithmen von $1{,}25 = 1 + \frac{1}{4}$ berechnet man bequem genug nach der Formel §. 142, wo nun $z = \frac{1}{4}$ ist,

$$\text{log. nat. } 1{,}25 = \left\{\begin{array}{l} +\ 0{,}25000000 - 0{,}03125000 \\ +\ 0{,}00520833 - 0{,}00097656 \\ +\ 0{,}00019531 - 0{,}00004069 \\ +\ 0{,}00000872 - 0{,}00000190 \\ +\ 0{,}00000042 - 0{,}00000010 \\ +\ 0{,}00000002 - 0{,}00000000 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} \text{log. nat. } 1{,}25 & = & 0{,}25541280 - 0{,}03226925 \\ & = & 0{,}22314355 \\ \text{log. nat. } 8 & = & 2{,}07944154 \\ \hline \text{log. } 10 & = & 2{,}30258509 \end{array}$$

Alle natürlichen Logarithmen müssen also mit 2,302585 09 dividirt, oder mit $\frac{1}{2{,}30258509} = 0{,}43429448$ multiplicirt werden; um Briggische Logarithmen zu geben.

148. Um die Logarithmen bequem zu berechnen, muſs man die Reihen so zu bekommen suchen, daſs ihre folgenden Glieder möglichst schnell abnehmen. Dazu bieten sich, zumal wenn schon mehrere Logarithmen bekannt sind, mehrere Hülfsmittel dar.

Wollte man z. B. log. nat. 101 suchen, so würde man (in §. 144.) $\frac{1+z}{1-z} = 101$ setzen, also $z = \frac{100}{102}$ annehmen können; aber dieses wäre ein zu wenig von 1 verschiedener Werth und gäbe ein minder schnelles Abnehmen der Glieder. Da wir aber

log. nat. 100 = 2 log. nat. 10 = 4,60517018

schon kennen, so ist es weit besser log. nat. 1,01 zu suchen, welcher nach §. 142 wird

$$\begin{aligned} \text{log. nat. } 1{,}01 &= 0{,}01000000 - 0{,}00005000 \\ &\quad + 0{,}00000033 - 0{,}00000000 \\ &= 0{,}01000033 - 0{,}00005000 \\ \text{log. nat. } 1{,}01 &= 0{,}00995033 \end{aligned}$$

Daraus wird, da log n. 100 = 4,60517018 ist der gesuchte log. nat. 101 = 4,61512051

Und solche Hülfsmittel bieten sich häufig dar.

Dritter Abschnitt.

Reihen zu Berechnung der trigonometrischen Gröſsen.

149. Bemerkung. Da die Gröſsen, welche wir Sinus, Cosinus u. s. w. eines Winkels oder Bogens nennen, auf eine bestimmte Weise von dem Bogen abhängen: so dürfen wir vermuthen, daſs auch sie sich durch Reihen, die nach den Potenzen des Bogens geordnet sind, darstellen lassen.

Um solche Reihen zu finden, denken wir uns den Bogen in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, um ihn eben so anzugeben, wie wir die trigonometrischen Grössen anzugeben pflegen. Zum Beispiel: der Bogen von 30 Graden ist $= \frac{1}{6}\pi = 0,523598$.

250. Um die Form, welche die Reihe für den Sinus und Cosinus haben wird, etwas näher zu bestimmen, dient die Ueberlegung, dass für einen sehr kleinen Bogen $= \varphi$ der Sinus sehr wenig von dem Bogen verschieden, und der Cosinus $= 1$ ist. Die Reihe für Sin. φ muss also mit dem Gliede $= \varphi$ anfangen, und in den folgenden Gliedern müssen höhere Potenzen von φ vorkommen; welche für sehr kleine Werthe von φ unbedeutend werden. Eben so wird die Reihe für Cosin. φ mit 1 anfangen, und in den folgenden Gliedern höhere Potenzen von φ enthalten, die desto weniger erheblich werden, je kleiner φ ist.

251. Obgleich wir hiedurch noch sehr wenig über diese Reihe belehrt werden, so können wir doch den Versuch wagen, sie nach den ganzen Potenzen von φ anzuordnen, und an diese Voraussetzung einige nähere Bestimmungen zu knüpfen.

Bekanntlich ist (Trigon. §. 35.) für jeden Bogen φ, $\text{Sin}^2\varphi + \text{Cos}^2\varphi = 1$. Setze ich also

$$\text{Sin}\varphi = \varphi + a\varphi^2 + b\varphi^3 + \text{etc.}$$
$$\text{Cos}\varphi = 1 + A\varphi + B\varphi^2 + C\varphi^3 + \text{etc.}$$

so müssen die noch unbestimmten Coefficienten so gegen einander bestimmt seyn, dass die Summe der Quadrate beider Reihen $= 1$ werde. Da nun

$$\begin{aligned}\text{Sin}^2\varphi &= \varphi^2 + 2a\varphi^3 + 2b\varphi^4 + \text{etc.}\\ &\qquad\qquad + a^2\varphi^4\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\text{Cos}^2\varphi &= 1 + 2A\varphi + 2B\varphi^2 + 2C\varphi^3 + \text{etc.}\\ &\qquad\qquad + A^2\varphi^2 + 2AB\varphi^3\end{aligned}$$

so folgt wenigstens, daſs $A = 0$,

$$2B + 1 = 0, \text{ oder } B = -\frac{1}{2}$$

seyn muſs. Auch für die übrigen Coefficienten lieſsen sich gegenseitige Bestimmungen finden, die aber wenig nützen, weil bloſs eine unbekannte Gröſse durch eine andre unbekannte ausgedrückt würde. So viel erhellt indeſs, daſs die Reihe für den Cosinus, wofern sie bloſs die Potenzen mit ganzen Exponenten enthält, mit $\text{Cos}\,\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \text{etc.}$ anfangen muſs.

152. Bemerkung. Um zu bestimmen, ob die angenommene Form der Reihe, daſs nämlich bloſs ganze Zahlen als Exponenten vorkommen, die richtige sey und um die Coefficienten zu finden, dient nur folgende Betrachtung.

Wenn sich eine Reihe

$$\text{Cos}\,\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + A\varphi^3 + B\varphi^4 + C\varphi^5 + \text{etc.}$$

angeben läſst, die allen Werthen von φ entspricht, so muſs ja auch

$$\text{Cos}\,2\varphi = 1 - \frac{1}{2}(2\varphi)^2 + A(2\varphi)^3 + B(2\varphi)^4 + \text{etc.}$$

seyn. Aber eben dieser Cosinus ist bekanntlich (Trigon. §. 46.) auch $\text{Cos}\,2\varphi = \text{Cos}^2\varphi - \text{Sin}^2\varphi$

oder $\text{Cos}\,2\varphi = 2\,\text{Cos}^2\varphi - 1$,

also hier $= -1 + 2\left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + A\varphi^3 + B\varphi^4 + \text{etc.}\right)^2$.

und dieser doppelte Werth dient uns, die Reihe ganz zu bestimmen.

153. Lehrsatz. Es ist $\text{Cos}\,\varphi =$

$$1 - \frac{1}{1.2}\varphi^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\varphi^4 - \frac{1}{1.2\ldots6}\varphi^6 + \frac{1}{1.2\ldots8}\varphi^8 - \text{etc.}$$

Beweis. Die im vorigen §. angegebnen zwei Reihen für $\mathrm{Cos}\, 2\varphi$ geben entwickelt:

$$1 - \frac{1}{2}.4\varphi^2 + A.8\varphi^3 + B.16.\varphi^4 + \text{etc.}$$

und die andre

$$= 1 - \frac{1}{2}.4\varphi^2 + 4A\varphi^3 + 4B\varphi^4 + \text{etc.}$$

$$+ 2.\frac{1}{4}\varphi^4$$

Daraus folgt $8\,A = 4\,A$, welches nur dann statt finden kann, wenn $A = 0$ ist, und eben so würde man bei allen folgenden ungeraden Potenzen von φ die Coefficienten $= 0$ finden, dagegen haben wir für B,

$$16\,B = 4\,B + \frac{1}{2}; \text{ also } B = + \frac{1}{1.2.3.4}.$$

Um die folgenden Coefficienten ohne unnöthig weitläufige Rechnung zu finden, nehme ich jetzt die Reihe so an, dass

$$\mathrm{Cos}\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\varphi^4 + D\varphi^6 + E\varphi^8 + F\varphi^{10} + G\varphi^{12} + \text{etc.}$$

sey. Ich lasse nämlich die Glieder weg, welche φ^3, φ^5, φ^7 etc. enthielten, da diese verschwinden und also die Rechnungen ohne Noth weitläufig machen.

Unsre zwei Werthe für $\mathrm{Cos}\, 2\varphi$ werden folglich:

$$= 1 - \frac{1}{2}.2^2.\varphi^2 + \frac{1}{1.2.3.4}.2^4.\varphi^4 + D.2^6.\varphi^6 + E.2^8.\varphi^8 +$$

$$= 1 - \frac{1}{2}.4\varphi^2 + 4.\frac{1}{1.2.3.4}\varphi^4 + 4D\varphi^6 + 4E\varphi^8 +$$

$$+ 2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\varphi^4 - 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{1.2.3.4}\varphi^6 - 4.\frac{1}{2}D\varphi^8 -$$

$$+ 2\left(\frac{1}{1.2.3.4}\right)^2\varphi^8 +$$

Daraus und aus der leicht zu übersehenden Fortsetzung dieser Entwickelung ergeben sich folgende Gleichungen, die wir einzeln näher betrachten wollen:

$2^6 . D = 4D - 4 . \frac{1}{2} . \frac{1}{1.2.3.4};$

oder

$(2^6 - 4) D = -4 . \frac{1}{2} . \frac{1}{1.2.3.4},$

Wir konnten aber (nach §. 108.) setzen

$2^6 = (1+1)^6 = 2 + 2 . 6 + 2 . \frac{6.5}{1.2} + \frac{6.5.4}{1.2.3}$

setzen, und eben so ist

$0 = (1-1)^6 = 2 - 2 . 6 + 2 . \frac{6.5}{1.2} - \frac{6.5.4}{1.2.3}$

also wenn man beide zu einander addirt

$2^6 = 4 + 4 . \frac{6.5}{1.2}$, oder $2^6 - 4 = 4 . \frac{6.5}{1.2}$

also $4 . \frac{6.5}{1.2} D = -4 . \frac{1}{2} . \frac{1}{1.2.3.4}$

oder, wenn man nach dem Gleichheitszeichen mit $\frac{6.5}{6.5}$ multiplicirt: $4 . \frac{6.5}{1.2} D = -4 . \frac{6.5}{1.2} . \frac{1}{1.2.3.4.5.6},$

das ist $D = -\frac{1}{1.2 \ldots 6},$

Eben so ist

$(2^8 - 4) E = +4 . \frac{1}{2} . \frac{1}{1.2 \ldots 6} + 2 . \frac{1}{1.2.3.4} . \frac{1}{1.2.3.4};$

aber $2^8 = (1+1)^8 = 2 + 2 . 8 + 2 . \frac{8.7}{1.2} + 2 . \frac{8.7.6}{1.2.3} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}$

und $0 = (1-1)^8 = 2 - 2 . 8 + 2 . \frac{8.7}{1.2} - 2 . \frac{8.7.6}{1.2.3} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}$

deren Summe $= 2^8 = 4 + 4 . \frac{8.7}{1.2} + 2 . \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4},$

Nun war $(2^8-4)E = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2\ldots6}+2\cdot\frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{1.2.3.4}$;

$$= \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}\left(4\frac{8.7}{1.2}+2\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\right)$$

also $(2^8-4)E = \frac{1}{1.2.3\ldots8}(2^8-4)$

$$E = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}$$

Diese Entwickelung zeigt deutlich genug, dass auch die folgenden Coefficienten eben so gefunden werden könnten, und folglich das im Lehrsatze angegebne Gesetz für alle folgenden Glieder statt findet.

154. Lehrsatz. Die Reihe, welche $\operatorname{Sin}\varphi$ darstellt ist: $\operatorname{Sin}\varphi = \varphi - \frac{1}{1.2.3}\varphi^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\varphi^5 - \frac{1}{1.2\ldots.7}\varphi^7$

$$+ \frac{1}{1.2\ldots.9}\varphi^9 - \frac{1}{1.2.3\ldots11}\varphi^{11} + \text{etc.}$$

Beweis. Da $\operatorname{Sin}^2\varphi + \operatorname{Cos}^2\varphi = 1$ seyn muss: so lässt sich offenbar die Reihe für $\operatorname{Sin}\varphi$ aus der für $\operatorname{Cos}\varphi$ herleiten. Da sich, wenn man versuchte, in der Reihe für $\operatorname{Sin}\varphi$ auch die geraden Potenzen von φ beizubehalten, leicht ergeben würde, dass die zugehörigen Coefficienten $= 0$ werden: so setze ich sogleich

$$\operatorname{Sin}\varphi = \varphi + \alpha\varphi^3 + \beta\varphi^5 + \gamma\varphi^7 + \delta\varphi^9 + \varepsilon\varphi^{11} + \text{etc.}$$

Die Reihe für $\operatorname{Cos}\varphi$ will ich kurz so ausdrücken:

$$\operatorname{Cos}\varphi = 1 + a\varphi^2 + b\varphi^4 + c\varphi^6 + d\varphi^8 + e\varphi^{10},$$

wo dann a, b, c, d, e etc. bekannte Grössen sind. Dann ist

$$\begin{array}{llllll}
\operatorname{Cos}^2\varphi = 1 + 2a\varphi^2 & + 2b\varphi^4 & + 2c\varphi^6 & + 2d\varphi^8 & + 2e\varphi^{10} \\
 & + a^2\varphi^4 & + 2ab\varphi^6 & + 2ac\varphi^8 & + 2ad\varphi^{10} \\
 & & & + b^2\varphi^8 & + 2bc\varphi^{10} \\
\operatorname{Sin}^2\varphi = \quad \varphi^2 & + 2\alpha\varphi^4 & + 2\beta\varphi^6 & + 2\gamma\varphi^8 & + 2\delta\varphi^{10} \\
 & & + \alpha^2\varphi^6 & + 2\alpha\beta\varphi^8 & + 2\alpha\gamma\varphi^{10} \\
 & & & & + \beta^2\varphi^{10}
\end{array}$$

Da die Summe beider = 1 seyn soll: so verschwinden alle nachfolgenden Glieder, und wir erhalten zur Bestimmung von α, β, etc.

$2\alpha = -a^2 - 2b;$

$2\beta + \alpha^2 = -(2ab + 2c);$

$2\gamma + 2\alpha\beta = -2ac - b^2 - 2d$, und so weiter.

Also:

$$2\alpha = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2.1.\frac{1}{1.2.3.4}\right)$$

$$= -\frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{4.3}{1.2} + 2\right);$$

oder $\alpha = -\dfrac{1}{1.2.3}$.

Ferner

$$2\beta = +2.\frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{1.2.3.4} + 2.1.\frac{1}{1.2....6} - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{1.2.3}.$$

Es ist aber $(1-1)^6 = 0 = 2 - 2.6 + 2.\dfrac{6.5}{1.2} - \dfrac{6.5.4}{1.2.3}$

und es läſst sich 2β so ausdrücken

$$2\beta = \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\left(2 + 2.\frac{6.5}{1.2} - \frac{6.5.4}{1.2.3}\right),$$

welches also gibt

$$2\beta = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.}(2.6.), \text{ also } \beta = \frac{1}{1.2.3.4.5}.$$

Eben so gibt

$2\gamma = -2ac - b^2 - 2d - 2\alpha\beta$,

$$2\gamma = -2.\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2.3...6} - \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{1.2.3.4} - 2.\frac{1}{1.2....8}$$
$$+ 2.\frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{1.2...5}$$

oder $2\gamma = -\dfrac{1}{1.2.3...8}\left\{2 + 2.\dfrac{8.7}{1.2} - 2.\dfrac{8.7.6}{1.2.3} + \dfrac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\right\}$.

und es ist

$$(1-1)^8 = 0 = 2 - 2.8 + 2.\frac{8.7}{1.2} - 2.\frac{8.7.6}{1.2.3} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4},$$

also $2 + 2.\frac{8.7}{1.2} - 2.\frac{8.7.6}{1.2.3} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 2.8,$

folglich $2\gamma = -\frac{1}{1.2.3...8}(2.8),$

$$\gamma = -\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$$

Diese Entwickelung läfst sich bei allen folgenden Coefficienten gebrauchen, und liefse sich selbst bei einem allgemeinen n^{ten} Gliede anwenden, um zu zeigen, dafs es der im Lehrsatze angegebenen Form gemäfs werden mufs, wenn alle vorigen Glieder ihr gemäfs waren.

155. **Bemerkung.** So wie hier der Sinus durch den Bogen ausgedrückt ist, könnte man auch den Bogen durch den Sinus darzustellen verlangen; dieses geschähe durch Umkehrung der für den Sinus gefundenen Reihe, und man erhielte, nach §. 126, wenn ich $\phi = A \sin\phi + B \sin^3\phi + C \sin^5\phi + D \sin^7\phi + E \sin^9\phi + \text{etc.}$ setze,

$A = 1;\ B = \frac{1}{1.2.3};$

$$C = -\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.2.3.1.2.}$$

$$= -\frac{1}{1.2.3.4.5}\left(1 - \frac{4.5}{1.2}\right)$$

$$= +\frac{1.3.3}{1.2.3.4.5};$$

$$D = \frac{1}{1.2...7} - 8.\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{8.9}{2.3}\left(\frac{1}{1.2.3}\right)^3.$$

$$D = \frac{1}{1.2\ldots7}\left\{1 - \frac{8.7.6}{1.2.3} + \frac{9.8.7.6.5.4}{2.3.2.3.2.3}\right\}$$

$$D = \frac{1.1.3.3.5.5}{1.2.3.4.5.6.7}.$$

Das Gesetz der Reihe läſst sich hier schon vermuthen und würde sich auch allgemein bestätigen. Es ist nämlich

$$\varphi = \text{Sin}\varphi + \frac{1}{1.2.3}\text{Sin}^3\varphi + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\text{Sin}^5\varphi$$

$$+ \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\text{Sin}^7\varphi + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\text{Sin}^9\varphi + \text{etc.}$$

156. Hieran knüpft sich, als leichte Folgerung die Bestimmung des Kreisumfangs durch den Halbmesser; denn da zum Bogen von 30 Graden $= \frac{1}{6}\pi$, der Sin. $= \frac{1}{2}$ gehört: so ist

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{9}{1.2\ldots5}\cdot\frac{1}{32} + \frac{225}{1.2\ldots7}\cdot\frac{1}{128} +$$

Da indeſs auf andern Wegen noch bequemere Ausdrücke für π gefunden werden, und es hier nur meine Absicht ist, den Gebrauch dieser Entwickelungen anzugeben, so verweile ich nicht länger hiebei.

Vierter Abschnitt.

Formeln, welche durch das Zeichen des Unmöglichen die Exponentialgröſsen auf trigonometrische zurückführen; und daraus hergeleitete Reihen für einige trigonometrische Gröſsen.

157. Bemerkung. Die Reihen, welche den Sinus und Cosinus durch den Bogen ausdrücken, stim-

men in allen ihren Gliedern, so mit der (§. 138.) für e^x gefundenen Reihe überein, dafs die Summe jener beiden nur in den Zeichen von dieser abweicht. Es war nämlich

$$\text{Sin}\,\varphi = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{120}\varphi^5 - \frac{1}{5040}\varphi^7 +$$

$$\text{Cos}\,\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4 - \frac{1}{720}\varphi^6 + \frac{1}{40320}\varphi^8 -$$

$$\text{und } e^\varphi = 1 + \varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{24}\varphi^4 + \frac{1}{120}\varphi^5 + \frac{1}{720}\varphi^6 + \text{etc.}$$

und es erhellt leicht, dafs

$$\frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} = 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4 + \frac{1}{720}\varphi^6 + \frac{1}{40320}\varphi^8 + \text{etc.}$$

$$\text{und } \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} = \varphi + \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{120}\varphi^5 + \frac{1}{5040}\varphi^7 + \text{etc.}$$

wird: — Reihen die zwar ganz die Glieder derer enthalten, welche $\text{Sin}\,\varphi$, $\text{Cos}\,\varphi$. ausdrücken, aber in Rücksicht der Zeichen von ihnen abweichen.

158. Eine leichte Ueberlegung zeigt, dafs man in $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ nur nöthig hätte $x = \varphi\sqrt{-1}$ zu setzen, um die Reihe für $\text{Cos}\,\varphi$ zu erhalten, und dafs man in $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ nur nöthig hätte $x = \varphi\sqrt{-1}$ zu setzen, um $(\sqrt{-1})\,\text{Sin}\,\varphi$ zu erhalten; und so gehen also Ausdrücke hervor, die mit Hülfe der Zeichen des Unmöglichen jene Exponentialgröfsen an die trigonometrischen knüpfen.

Da nämlich $x = \varphi.\sqrt{-1}$, gibt
$x^2 = -\varphi^2$; $x^3 = -\varphi^3\sqrt{-1}$; $x^4 = \varphi^4$;
$x^5 = \varphi^5\sqrt{-1}$; $x^6 = -\varphi^6$; $x^7 = -\varphi^7\sqrt{-1}$,
und so weiter, so ist

$$\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}=1-\frac{1}{2}\varphi^2+\frac{1}{24}\varphi^4-\frac{1}{720}\varphi^6+\frac{1}{40320}\varphi^8-\text{etc.}$$

$$=\operatorname{Cos}\varphi;$$

$$\frac{e^{\varphi\sqrt{-1}}-e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2.\sqrt{-1}}=\varphi-\frac{1}{6}\varphi^3+\frac{1}{120}\varphi^5-\frac{1}{5040}\varphi^7+\frac{1}{362880}\varphi^9-\text{etc.}$$

$$=\operatorname{Sin}\varphi.$$

Diese Formeln sind schon an sich selbst merkwürdig; sie können uns aber zugleich auch dienen, um neue Bestimmungen aus ihnen herzuleiten, die auf andern Wegen nicht so leicht zu erhalten wären.

159. Jene Formeln geben

$e^{\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\varphi\sqrt{-1}}=2\operatorname{Cos}\varphi;$

$e^{\varphi\sqrt{-1}}-e^{-\varphi\sqrt{-1}}=2.\sqrt{-1}.\operatorname{Sin}\varphi;$

also $e^{\varphi\sqrt{-1}}=(\operatorname{Cos}\varphi+\sqrt{-1}.\operatorname{Sin}\varphi);$

und $e^{-\varphi\sqrt{-1}}=(\operatorname{Cos}\varphi-\sqrt{-1}.\operatorname{Sin}\varphi);$

oder

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{ log. nat. }(\operatorname{Cos}\varphi+\sqrt{-1}.\operatorname{Sin}\varphi);$$

$$\text{und }\varphi=\frac{-1}{\sqrt{-1}}\text{ log. nat. }(\operatorname{Cos.}\varphi-\sqrt{-1}.\operatorname{Sin}\varphi);$$

160. Lehrsatz. Es läſst sich jeder Bogen φ durch seine Tangente so ausdrücken, daſs, wenn ich $\operatorname{tang}\varphi=t$ setze,

$$\varphi=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+\frac{1}{9}t^9-\frac{1}{11}t^{11}+\text{etc.}$$

ist,

Beweis. Wenn ich die beiden am Ende des letzten §. gefundenen Werthe von ϕ summire, so ist

$$2\phi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\mathrm{Cos}\phi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\phi) - \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\mathrm{Cos}\phi - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\phi)$$

oder $2\phi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log\left(\frac{\mathrm{Cos}\phi + \sqrt{-1}.\mathrm{Sin}\phi}{\mathrm{Cos}\phi - \sqrt{-1}.\mathrm{Sin}\phi}\right)$;

oder $2\phi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log\left(\frac{1 + \sqrt{-1}.\mathrm{tang}\phi}{1 - \sqrt{-1}.\mathrm{tang}\phi}\right)$

Entwickeln wir hier nach Anleitung von §. 144. den Logarithmen in eine Reihe, so wird, wenn ich $\mathrm{tang}\phi = t$ setze,

$$\log \frac{1+\sqrt{-1}.t}{1-\sqrt{-1}.t} = 2\left(t.\sqrt{-1} + \frac{1}{3}(\sqrt{-1}.t)^3 + \frac{1}{5}(t.\sqrt{-1})^5 + \text{etc.}\right)$$

$$\text{oder} = 2\sqrt{-1}\left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \text{etc.}\right)$$

also $2\phi = \frac{2.\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \text{etc.}\right)$

eine Reihe, in welcher alles Unmögliche wegfällt, und die eben das angibt, was im Lehrsatze behauptet ist.

161. Diese Reihe, aus welcher der Bogen durch seine Tangente bestimmt werden kann, gibt ein Beispiel, wie das Rechnen mit unmöglichen Ausdrücken, wenn die unmöglichen Glieder sich aufheben, zu etwas Nützlichem führen kann; denn eben diese Reihe läſst sich auch auf anderm Wege bestimmen, wobei ich jedoch hier nicht verweilen will, da die folgende Betrachtung uns besser dienen wird, die dort zu findenden Sätze, nachdem sie aus diesen unmöglichen Formen hergeleitet werden, auch anders zu begründen.

162. Bemerkung. Die Formeln im §. 159. geben auch

$$e^{n\varphi\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos}\, n\varphi + \sqrt{-1}.\mathrm{Sin}\, n\varphi = (\mathrm{Cos}\varphi + \sqrt{-1}.\mathrm{Sin}\varphi)^n;$$

und

$$e^{-n\varphi\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos}\, n\varphi - \sqrt{-1}.\mathrm{Sin}\, n\varphi = (\mathrm{Cos}\varphi - \sqrt{-1}.\mathrm{Sin}\varphi)^n;$$

also

$$2\mathrm{Cos}\, n\varphi = (\mathrm{Cos}\varphi + \sqrt{-1}.\mathrm{Sin}\varphi)^n + (\mathrm{Cos}\varphi - \sqrt{-1}.\mathrm{Sin}\varphi)^n;$$

und

$$2\mathrm{Sin}\, n\varphi = \frac{(\mathrm{Cos}\varphi + \sqrt{-1}.\mathrm{Sin}\varphi)^n - (\mathrm{Cos}\varphi - \sqrt{-1}.\mathrm{Sin}\varphi)^n}{\sqrt{-1}}.$$

163. Lehrsatz. Allemal ist

$$\mathrm{Cos}\, n\varphi = \mathrm{Cos}^n\varphi - \frac{n.(n-1)}{1\;.\;2}\mathrm{Sin}^2\varphi.\mathrm{Cos}^{n-2}\varphi +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}\mathrm{Sin}^4\varphi.\mathrm{Cos}^{n-4}\varphi$$
$$- \frac{n.(n-1)\ldots(n-5)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;.\;6}\mathrm{Sin}^6\varphi.\mathrm{Cos}^{n-6}\varphi + \text{etc.}$$

und

$$\mathrm{Sin}\, n\varphi = n.\mathrm{Sin}\varphi\,\mathrm{Cos}^{n-1}\varphi - \frac{n.(n-1)\,(n-2)}{1\;.\;2\;.\;3}\mathrm{Sin}^3\varphi\,\mathrm{Cos}^{n-3}\varphi$$
$$+ \frac{n.(n-1)\ldots(n-4)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;5}\mathrm{Sin}^5\varphi\,\mathrm{Cos}^{n-5}\varphi - \text{etc.}$$

Beweis. Diese Reihen folgen unmittelbar aus der Entwickelung der am Ende des vorigen §. angegebenen Potenzen.

164. Anmerkung. Diese Reihen lassen sich so darstellen, daſs in der ersten nichts als Potenzen von Cos φ vorkommen; die letzte aber auſser dem die ganze Reihe multiplicirenden Factor Sin φ, auch bloſs Potenzen von Cos φ enthält. Es ist nämlich leicht möglich die Potenzen von Sin φ, deren Exponent eine gerade Zahl ist, durch Cos φ auszudrücken.

Da es nicht meine Absicht ist, diese Reihen vollständig mitzutheilen, sondern nur zu zeigen, welche Anwendungen die Entwickelung der Polynomien hier

findet, so übergehe ich jene Umgestaltungen und zeige nur, wie man die allgemeine Richtigkeit der eben angeführten Reihen auch auf andern Wegen beweisen kann.

165. Bemerkung. Wenn man etwa den Ableitungen, die mit Hülfe der Zeichen des Unmöglichen gefunden sind, kein völliges Vertrauen schenken wollte: so würde man für folgende Fragen die Beantwortung auf andern Wegen suchen müssen. 1. Sind die beiden Reihen in §. 163 so beschaffen, dafs sie $\mathrm{Cos}^2 n\varphi + \mathrm{Sin}^2 n\varphi = 1$ geben? — Wenn dieses ist, so sind beide richtig, wenn die eine richtig ist. 2. Läfst sich zeigen, dafs die Reihen für $(n+1)\varphi$ gelten, wenn sie für $n\varphi$ gelten? Alsdann sind sie wenigstens für alle ganze positive Zahlen, die man für n annimmt, gültig, indem die Reihen für $n=1$ und $n=2$ richtige Werthe geben. 3. Läfst sich zeigen, dafs sie auch gelten, wenn n ein Bruch ist?

166. Um die erste Frage zu beantworten, haben wir nur nöthig, beide Reihen zur zweiten Potenz zu erheben, und es wird, wenn ich $\mathrm{Cos}\, n\varphi =$

$$\mathrm{Cos}^n\varphi.\left\{1-\frac{n.(n-1)}{1\,.\,2}\mathrm{tang}^2\varphi+\frac{n.(n-1)...(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\mathrm{tang}^4\varphi-\mathrm{etc.}\right\}$$

und $\mathrm{Sin}\, n\varphi =$

$$\mathrm{Cos}^n\varphi\left\{n.\mathrm{tang}\varphi-\frac{n.(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\mathrm{tang}^3\varphi+\mathrm{etc.}\right\}$$

setze, $\mathrm{Cos}^2 n\varphi + \mathrm{Sin}^2 n\varphi =$

$$\cos^{2n}\varphi.\left\{\begin{array}{l}
1-2.\dfrac{n(n-1)}{1\,.\,2}t^2+\dfrac{2.n(n-1)\ldots(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}t^4-\dfrac{2.n\ldots(n-5)}{1\,.\,2\ldots 6}t^6+\\
\qquad\qquad +\dfrac{n.(n-1)(n)(n'-1)}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2}t^4-\dfrac{2.n.(n-1).n'\ldots(n-3)}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}t^6\\
\qquad +n^2t^2-2.n.\dfrac{n(n-1).(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}t^4+\dfrac{2.n.n(n-1)\ldots(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}t^6\\
\qquad\qquad\qquad +\dfrac{n^2.(n-1)^2.(n-2)^2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,1\,.\,2\,.\,3}t^6
\end{array}\right.$$

Wenn man hier die in $t^2 = \tang^2\varphi$ multiplicirten Glieder summirt, so ist das in t^2 Multiplicirte $= +n$;

Alle in t^4 multiplicirenden Glieder enthalten den Factor $\frac{n.(n-1)}{1 \cdot 2}$ und dieses Glied läßt sich dann so übersehen,

$$\frac{n.(n-1)}{1 \cdot 2}\left\{\begin{array}{l} \frac{2(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4} \\ -\frac{2n(n-2)}{3 \cdot 4} - \frac{6.n(n-2)}{3 \cdot 4} \\ \qquad + \frac{6.n(n-1)}{3 \cdot 4} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left\{-\frac{6.(n-2)}{3 \cdot 4} + \frac{6n}{3.4}\right\},$$

$$= \frac{n.(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Alle in t^6 multiplicirten Glieder enthalten den Factor $\frac{n.(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ und wenn ich diesen für jetzt weglasse: so ist alles darin Multiplicirte in diesem Gliede $=$

$$-\frac{2(n-3)(n-4)(n-5)}{4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$+\frac{2.n.(n-3)(n-4)}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{10.n(n-3)(n-4)}{4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$-\frac{10.n(n-1)(n-3)}{4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{20.n(n-1)(n-3)}{4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$+\frac{20.n.(n-1)(n-2)}{4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$= +\frac{10.(n-3)(n-4)}{4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{30n(n-3)}{4.5.6} + \frac{20.n.(n-1)}{4.5.6}$$

$$= \frac{(-20n-40)(n-3) + 20n(n-1)}{4 \cdot 5 \cdot 6} = 1.$$

Das ganze in t^6 multiplicirte Glied ist also

$$\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$

Eben so würden sich die folgenden Glieder einfach darstellen lassen, und wir erhielten

$Cos^2.n\varphi + Sin^2.n\varphi =$

$$Cos^{2n}\varphi \left\{ 1 + n\,tang^2\varphi + \frac{n.(n-1)}{1.2} tg^4\varphi + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} tg^6\varphi \right.$$

$$\left. + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} tg^8\varphi + etc. \right\}$$

$$\text{also} = Cos^{2n}\varphi(1+tang^2\varphi)^n = \left\{ Cos^2\varphi(1+tg^2\varphi) \right\}^n = 1.$$

Also bestehen die beiden Reihen in §. 163. so dafs die eine richtig ist, wenn es die andre ist.

167. Um die zweite im §. 165. aufgeworfene Frage zu beantworten, müssen wir erwägen, dafs

$$Sin(n+1)\varphi = Sin\,n\varphi.Cos\varphi + Cos\,n\varphi.Sin\varphi$$

ist, und folglich unsre Reihen hiefür geben,

$$Cos^n\varphi.Sin\varphi - \frac{n(n-1)}{1.2} Sin^3\varphi\,Cos^{n-2}\varphi$$

$$+ \frac{n\ldots(n-3)}{1\ldots4} Sin^5\varphi\,Cos^{n-4}\varphi - $$

$$+ n\,Cos^n\varphi\,Sin\varphi - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} Sin^3\varphi\,Cos^{n-2}\varphi$$

$$+ \frac{n\ldots(n-4)}{1\ldots5} Sin^5\varphi\,Cos^{n-4}\varphi -$$

deren Summe gibt

$$(n+1)Sin\varphi\,Cos^n\varphi - \frac{(n+1).n(n-1)}{1.2.3} Sin^3\varphi\,Cos^{n-2}\varphi$$

$$+ \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} Sin^5\varphi\,Cos^{n-4}\varphi -$$

Dieser Ausdruck ist genau eben so für $Sin(n+1)\varphi$ gebildet, wie es der in §. 163. für $Sin\,n\varphi$ war; also gilt der Ausdruck dort für alle ganze positiven Zah-

len, die man für n setzen könnte, da er für $n = 1$ und $n = 2$ gilt.

168. Die dritte Frage, ob n auch ein Bruch seyn dürfe, läfst sich am besten so beantworten.

Nach unsern Formeln wurde, wenn ich $\mathrm{Sin}\,\varphi = s$ $\mathrm{Cos}\,\varphi = c$ setze,

$$\mathrm{Sin}\,n\varphi = n.s.c^{n-1} - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} s^3 c^{n-3} + \frac{n.(n-1)\ldots(n-4)}{1.2.3.4} s^5 c^{n-5} -$$

$$\mathrm{Cos}\,n\varphi = c^n - \frac{n.(n-1)}{1.2} s^2 c^{n-2} + \frac{n\ldots(n-3)}{1.2.3.4} s^4 . c^{n-4} -$$

$$\mathrm{Sin}\,m\varphi = m.s.c^{m-1} - \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3} s^3 . c^{m-3}$$
$$+ \frac{m\ldots(m-4)}{1\ldots5} s^5 . c^{m-5} -$$

$$\mathrm{Cos}\,m\varphi = c^m - \frac{m.(m-1)}{1.2} s^2 c^{m-2}$$
$$+ \frac{m.(m-1)\ldots(m-3)}{1.2\ldots4} s^4 . c^{m-4} -$$

also die Summe der Produkte

$$\mathrm{Sin}\,m\varphi . \mathrm{Cos}\,n\varphi + \mathrm{Cos}\,m\varphi . \mathrm{Sin}\,n\varphi$$

$$= m.s.c^{m+n-1} - \frac{m.n(n-1)}{1.1.2} s^3 . c^{m+n-3}$$
$$+ \frac{m.n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.1.2.3.4} s^5 c^{m+n-5} -$$
$$- \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3} s^3 . c^{m+n-3}$$
$$+ \frac{m.(m-1)(m-2).n.(n-1)}{1.2.3.1.2} s^5 c^{m+n-5} -$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} s^5 . c^{m+n-5} -$$
$$n.s.c^{m+n-1} - \frac{m.(m-1).n}{1.2.1} s^3 . c^{m+n-3}$$
$$+ \frac{n.m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.1.2.3.4} s^5 . c^{m+n-5} -$$

$$- \frac{n.(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} s^3 . c^{m+n-3}$$

$$+ \frac{n.(n-1)(n-2).m.(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,1\,.\,2} s^5 . c^{m+n-5} -$$

$$+ \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} s^5 . c^{m+n-5} -$$

Diese Summe läſst sich ganz genau eben so wie die im §. 115. betrachtete, in folgende verwandeln:

$$(m+n) s . c^{m+n-1} - \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} s^3 . c^{m+n-3}$$

$$+ \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)(m+n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} s^5 . c^{m+n-5} -$$

und ist folglich für $\mathrm{Sin}(m+n)\varphi$ genau eben so gebildet, wie es die Reihe im §. 163. für $\mathrm{Sin}\, n\varphi$ war. Man kann hier also genau so wie bei den Potenzen mit Bruch-Exponenten sagen, ist $n = m = \frac{1}{2}$, so zeigten sich die Reihen im §. 163. als richtig, weil sie zu dem richtigen Werthe für $\mathrm{Sin}(m+n)\varphi = \mathrm{Sin}\varphi$ führen, und so in allen andern Fällen. Also sind jene Reihen §. 163. noch richtig, wenn auch n einen Bruch bedeutet.

169. Anmerkung. Diese umständlichere Entwickelung schien mir hier in doppelter Hinsicht wohl eine Stelle zu verdienen; erstlich, weil es nicht so ganz unnöthig scheint, Folgerungen, die aus der Rechnung mit unmöglichen Zeichen flieſsen, auch auf andern Wegen zu beweisen, zweitens, weil Anwendungen dieser Art mit dem polynomischen Lehrsatze, und mit der Betrachtung der Reihen am besten vertraut machen.

Fünfter Abschnitt.

Lehrsätze aus der Theorie der Gleichungen.

170. Bemerkung. Wir haben in einem der frühern Abschnitte (§. 86.) gefunden, daſs das Produkt aus den n Factoren $(1-ax)(1-bx)(1-cx)$ etc. durch $1-Ax+Bx^2-Cx^3+Dx^4-\ldots\pm Nx^n$ dargestellt werde, wenn $A =$ der Summe aller Gröſsen a, b, c etc., $B =$ der Summe aller Produkte, die sich als Combinationen zu zwei, $C =$ der Summe aller Produkte, die sich als Combinationen zu drei aus jenen Gröſsen a, b, c etc. ohne Wiederholung bilden lassen u. s. w.

Wenn man hier jeden der Factoren durch x und folglich das Produkt durch x^n dividirt, so ist

$\frac{1}{x^n}-\frac{A}{x^{n-1}}+\frac{B}{x^{n-2}}$ etc. das Produkt aus —

$\left(\frac{1}{x}-a\right)\left(\frac{1}{x}-b\right)\left(\frac{1}{x}-c\right)$ etc. oder wenn ich $\frac{1}{x}=z$ nenne,

$$z^n-A.z^{n-1}+B.z^{n-2}-Cz^{n-3}+\text{etc.}$$
$$=(z-a)(z-b)(z-c)\text{ etc.}$$

171. Bemerkung. So wie hier das Produkt

$$z^n-Az^{n-1}+Bz^{n-2}-Cz^{n-3}+\text{etc.}$$

aus der Multiplication der gegebnen Factoren in einander hervorging, und $=0$ seyn muſs, wenn irgend einer der Factoren $=0$ ist; eben so denken wir uns nun irgend eine gegebene Gleichung, welche die n ersten Potenzen von z enthält und auf 0 gebracht ist, als entstanden aus n unbekannten Factoren, von der Form $(z-a)$; wir nennen die (wenn gleich noch unbekannten) Factoren $(z-a)(z-b)$ etc. die wir als $=0$ gesetzt ansehen, die Wurzelgleichungen und

a, b, etc. die Wurzeln jener Gleichungen*), und sagen also nun, in einer Gleichung wie

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

müsse A gleich der Summe alle Wurzeln, B gleich der Summe der Produkte aus je zwei verschiedenen, C gleich der Summe der Produkte aus je drei verschiedenen, D gleich der Summe der Produkte aus je vier verschiedenen, E gleich dem Produkte aller fünf Wurzeln seyn. Und so für jede höhere Ordnung von Gleichungen. Hieraus lassen sich die Summen der zweiten Potenzen aller Wurzeln, die Summen der dritten Potenzen, und kurz die Summen der m^{ten} Potenzen aller Wurzeln finden.

172. Lehrsatz. Wenn α, β, γ, δ, ε etc. die Wurzeln der Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

sind, so ist die Summe aller Wurzeln

$$\alpha + \beta + \gamma + \text{etc.} = A = \mathfrak{A};$$

die Summe ihrer zweiten Potenzen

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.} = A^2 - 2B = \mathfrak{B};$$

die Summe ihrer dritten Potenzen

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.} = A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A} + 3C = \mathfrak{C};$$

und eben so

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 \text{ etc.} = A\mathfrak{C} - B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A} - 4D = \mathfrak{D},$$

$$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 \text{ etc.} = A\mathfrak{D} - B\mathfrak{C} + C\mathfrak{B} - D\mathfrak{A} + 5E = \mathfrak{E}$$

und so weiter.

Beweis. Daſs zuerst die Summe aller Wurzeln $= A$ sey, ist bekannt (§. 86.), und daſs die Summe ihrer Quadrate $= A^2 - 2B = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.})^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \text{etc.})$ sey, ist auch leicht zu übersehen. Aber es läſst sich auch zeigen, daſs die im Lehrsatz angegebene Regel für die Summe der nächsten Potenzen gilt, wenn sie für die Summe aller niedrigern galt. Wir wollen annehmen, die Ausdrücke für die Summen der ersten, zweiten, drit-

*) Ich setze voraus, daſs das hier Angedeutete schon aus der Lehre von den Gleichungen bekannt sey.

ten und vierten Potenzen der Wurzeln wären schon als richtig anerkannt: so läfst sich die Bestimmung für die Summe der fünften Potenzen so übersehen.

Nimmt man $A\mathfrak{D} = (\alpha+\beta+\gamma+\text{etc.})(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\text{etc.})$ so erhält man aufser den sämmtlichen fünften Potenzen auch noch alle die Combinationen zu fünf, welche vier gleiche und eine verschiedene der Wurzeln enthalten. Eben diese Combinationen sind sämmtlich in
$B.\mathfrak{C} = (\alpha\beta+\alpha\gamma+\text{etc.}+\beta\gamma+\text{etc.})(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\text{etc.})$
enthalten; aber hier kommen aufserdem noch vor, alle Produkte in welchen drei gleiche und zwei ungleiche Factoren verbunden sind. Indem man also diese Produkte subtrahirt, nimmt man so viel zu viel weg, als die Summe dieser Produkte angibt. Dieses wird ersetzt durch $C\mathfrak{B}$, worin gerade alle diese fehlenden Produkte vorkommen, aber aufserdem noch die Summen aller Produkte, worin zwei gleiche und drei ungleiche vorkommen; diese werden also zuviel zugelegt, und müssen durch das nächste Produkt aufgehoben werden u. s. w.

Beispiel. Wenn wir die Gleichung
$$x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 29x^2 + 2x - 24 = 0$$
betrachten, welche fünf Wurzeln, die ich $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ nennen will, hat, so ist
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = 5 = \mathfrak{A} = A;$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\alpha\varepsilon+\beta\gamma+\beta\delta+\beta\varepsilon+\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon = -3 = B;$$
$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\gamma\delta+\alpha\gamma\varepsilon+\alpha\delta\varepsilon+\beta\gamma\delta+\beta\gamma\varepsilon+\beta\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon = -29 = C;$$
$$\alpha\beta\gamma\delta+\alpha\beta\gamma\varepsilon+\alpha\beta\delta\varepsilon+\alpha\gamma\delta\varepsilon+\beta\gamma\delta\varepsilon = 2 = D,$$
endlich $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon = E = +24$.

Wenn ich hier $\mathfrak{D} = \alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4+\varepsilon^4$,
$\mathfrak{C} = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\varepsilon^3$,
$\mathfrak{B} = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2$, setze, so ist
$$A\mathfrak{D} = \alpha^5+\beta^5+\gamma^5+\delta^5+\varepsilon^5+\alpha^4(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+\beta^4(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)$$
$$+\gamma^4(\alpha+\beta+\delta+\varepsilon)+\delta^4(\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon)+\varepsilon^4(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$
$$B\mathfrak{C} = \alpha^4(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+\beta^4(\alpha+\gamma+\delta+\varepsilon)+\gamma^4(\alpha+\beta+\delta+\varepsilon)$$
$$+\delta^4(\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon)+\varepsilon^4(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$
$$\left\{\begin{array}{l}+\alpha^3(\beta\gamma+\beta\delta+\beta\varepsilon+\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon)\\+\beta^3(\alpha\gamma+\alpha\delta+\alpha\varepsilon+\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon)\\+\gamma^3(\alpha\beta+\alpha\delta+\alpha\varepsilon+\beta\delta+\beta\varepsilon+\delta\varepsilon)\\+\delta^3(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\varepsilon+\beta\gamma+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon)\\+\varepsilon^3(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)\end{array}\right\}$$

wo also $A\mathfrak{D} - B\mathfrak{C}$ die sämmtlichen in $\{\ \}$ eingeschlossenen Glieder negativ enthält; aber alle diese kommen in $C\mathfrak{B}$ vor, und außer diesen enthält $C\mathfrak{B}$ folgende:

$$\alpha^2(\beta\gamma\delta + \beta\gamma\varepsilon + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon) + \beta^2(\alpha\gamma\delta + \alpha\gamma\varepsilon + \alpha\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon)$$
$$+ \gamma^2(\alpha\beta\delta + \alpha\beta\varepsilon + \alpha\delta\varepsilon + \beta\delta\varepsilon) + \delta^2(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\varepsilon + \alpha\gamma\varepsilon + \beta\gamma\varepsilon)$$
$$+ \varepsilon^2(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta);$$

diese Glieder kommen also positiv vor in der Summe der drei Glieder $A\mathfrak{D} - B\mathfrak{C} + C\mathfrak{B}$, aber sie fallen weg, durch die in $D\mathfrak{A}$ vorkommenden Glieder, und $D\mathfrak{A}$ enthält außerdem nur noch $5\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, welches durch $-5E$ aufgehoben wird.

Unsre Gleichung ist aus den Wurzelgleichungen
$x - 1 = 0$; $x + 1 = 0$; $x + 2 = 0$; $x - 3 = 0$; $x - 4 = 0$;
entstanden, und die 5 Wurzeln sind also, wenn ich sie nach der Größe ordne,
$\alpha = -2$; $\beta = -1$; $\gamma = +1$; $\delta = +3$; $\varepsilon = +4$. Und nach unsrer Formel wird,

die Summe der Wurzeln $= +5$;
die Summe ihrer 2. Potenzen $= 25 + 6 = 31$;
die Summe ihrer 3. Potenzen $= 5.31 + 3.5 - 3.29 = 83$;
die Summe ihrer 4. Potenzen $= 5.83 + 3.31 - 5.29 - 4.2 = 355$;
die Summe ihrer 5. Potenzen $= 5.355 + 3.83 - 31.29 - 2.5$
$+ 5.24 = 1235$;
die Summe ihrer 6. Potenzen $= 5.1235 + 3.355 - 29.83 - 2.31$
$+ 5.24 = 4891$.

Auch die höhern Potenzen lassen sich so finden; denn es erhellt, daß z. B. bei einer Gleichung des dritten Grades wie $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$, die Größen $D = 0$, $E = 0$ u. s. w. sind, dennoch aber

$$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = A\mathfrak{D} - B\mathfrak{C} + C\mathfrak{B} = \mathfrak{E};$$
$$\alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 = A\mathfrak{E} - B\mathfrak{D} + C\mathfrak{C}$$ seyn wird.

173. Alle diese Bestimmungen finden noch Statt, wenn auch unter den Wurzeln der Gleichung unmögliche vorkommen.

Beispiel. Die Gleichung $x^3 = 5x^2 + 9x - 9$, hat die reelle Wurzel, $x = 3$, und die unmöglichen Wurzeln $= (1 + \sqrt{-2})$ und $= (1 - \sqrt{-2})$ deren Summe $= 5$; Summe der Quadrate $= 7 = 5.5 - 2.9$. Die Summe der dritten Potenzen $= 17 = 5.7 - 9.5 + 3.9$.

174. Diese Formeln können uns oft belehren, daß die Gleichung gewiß unmögliche Wurzeln habe.

Zum Beispiel die Gleichung $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\text{etc.}=A^2-2B$, deutet gewiſs auf unmögliche Wurzeln, wenn A^2-2B negativ ist, indem die Quadrate möglicher Gröſsen allemal positiv sind; indeſs kann es auch unmögliche Wurzeln geben, wenn A^2-2B positiv ist, wie es im vorigen §. der Fall war.

175. **Anmerkung.** Auch die Regel, wie man jede dieser Summen unabhängig von den vorhergehenden findet, lieſse sich hier sehr wohl ableiten, nur daſs der allgemeine Beweis dafür etwas weitläufig würde. Diese Regel ist, daſs man aus den Gröſsen A, B, C, D etc., denen man die Zeiger 1, 2, 3, 4 etc. zueignet, alle Variationen zur Summe n sucht, wenn man $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\text{etc.}$ bestimmen will; daſs man jeder dieser Variationen (die als Produkte angesehen werden) ihre Permutationszahl als Factor und die Zahl, welche der Anzahl der in einander multiplicirten Gröſsen gleich ist, als Divisor beifügt; daſs man in allen so gefundenen Produkten die Gröſsen, deren Zeiger eine gerade Zahl ist, als negativ ansieht, die Summe aller sucht, und diese mit n multiplicirt.

176. **Lehrsatz.** Wenn man eine Gleichung so bilden will, daſs die Summe ihrer Wurzeln $=\mathfrak{A}$, die Summe der zweiten Potenzen ihrer Wurzeln $=\mathfrak{B}$, die Summe ihrer dritten Potenzen $=\mathfrak{C}$, und so fort bis zur Summe der n^{ten} Potenzen sey, wenn die verlangte Gleichung vom n^{ten} Grade ist: so sind in der verlangten Gleichung

$$x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-Ex^{n-5}+\text{etc.}=0$$

die Coefficienten $A=\mathfrak{A}$;

$$B=\frac{A\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{2};$$

$$C=\frac{B\mathfrak{A}-A\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}{3};$$

$$D=\frac{C\mathfrak{A}-B\mathfrak{B}+A\mathfrak{C}-\mathfrak{D}}{4},$$

und so weiter.

Dieses ist eine unmittelbare Folgerung aus §. 172. Die allgemeine Regel wäre jedes Mal aus den Reihen

1, A, B, C, D. etc.
𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 etc.

deren Zeiger 0, 1, 2, 3, 4 etc.
die Variationsformen aus zwei Gröſsen zur Summe $= m$ zu suchen, wenn man den Coefficienten zu x^{n-m} verlangt; diese Variationsformen, mit wechselnden Zeichen, so daſs immer 𝔅, 𝔇, u. s. w. das negative Zeichen haben, zu verbinden und durch m zu dividiren.

177. Bemerkung. Diese letzte Regel findet Anwendung, wenn man aus einer gegebnen Gleichung eine andre herleiten will, deren Wurzeln gleich den sämmtlichen Differenzen der Wurzeln jener sind.

Es sey nämlich

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc.} = 0,$$

eine Gleichung, deren Wurzeln, n an der Zahl, ich durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. andeute; so sind $(\alpha-\beta)$, $(\alpha-\gamma)$, $(\alpha-\delta)$ etc. $(\beta-\alpha)$, $(\beta-\gamma)$, $(\beta-\delta)$ etc. $(\gamma-\alpha)$, $(\gamma-\beta)$, $(\gamma-\delta)$ etc. die Unterschiede der Wurzeln, und die Anzahl dieser Unterschiede ist $= n.(n-1)$. Wenn man sich nun eine Gleichung vom Grade $n.(n-1)$ denkt, deren sämmtliche Wurzeln jene Unterschiede sind, so erhellt leicht, daſs darin die unbekannte Gröſse zur zweiten, vierten, sechsten Potenz etc. erhoben vorkommen kann, weil die sämmtlichen Differenzen zweimal, einmal mit positivem, einmal mit negativem Zeichen vorkommen.

Nenne ich also u die Gröſse, welche in der Gleichung

$$u^m - a u^{m-1} + b u^{m-2} - c u^{m-3} + \text{etc.} = 0.$$

die sämmtlichen den Quadraten jener Unterschiede entsprechenden Werthe erhalten kann, so muſs in dieser Gleichung $m = \frac{n.(n-1)}{2}$ seyn, und es käme nun darauf an, die Coefficienten a, b, c etc. gehörig zu be-

stimmen. Diese werden am besten vermittelst der Summen höherer Potenzen aller Werthe von u bestimmt.

Beispiel. Die Gleichung

$$x^3 - x^2 - 24x + 36 = 0$$

hat die Wurzeln $\alpha = +3$, $\beta = +2$, $\gamma = -6$. deren Differenzen $= +1$; $= +9$; $= -1$; $= +8$; $= -9$; $= -8$; sind. Die zweiten Potenzen dieser Unterschiede sind also $= 1$; $= 64$; $= 81$, und wenn ich diese $= u$ nenne, so ist die Gleichung für die Quadrate der Unterschiede $u^3 - 146u^2 + 6329u - 5184 = 0$, deren Wurzeln, nämlich $= 1$, $= 64$, $= 81$, sind.

178. Lehrsatz. Wenn man aus einer gegebenen Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc.} = 0$$

die Gleichung für die Quadrate der Unterschiede zwischen den Wurzeln jener

$$u^m - au^{m-1} + bu^{m-2} - cu^{m-3} - du^{m-4} - \text{etc.} = 0$$

sucht: so ist die Summe der Wurzeln der letzteren

$$= n.\mathfrak{B} - \frac{2.\mathfrak{A}^2}{2};$$

die Summe ihrer zweiten Potenzen

$$= n\mathfrak{D} - 4\mathfrak{A}.\mathfrak{C} + \frac{4.3}{1.2}\,\frac{\mathfrak{B}^2}{2};$$

die Summe ihrer dritten Potenzen

$$= n.\mathfrak{F} - 6.\mathfrak{A}.\mathfrak{E} + \frac{6.5}{1.2}\,\mathfrak{B}\mathfrak{D} - \frac{6.5.4}{1.2.3}\,\frac{\mathfrak{C}^2}{2};$$

ihrer vierten Potenzen

$$= n.\mathfrak{H} - 8\mathfrak{A}\mathfrak{G} + \frac{8.7}{1.2}\,\mathfrak{B}.\mathfrak{F} - \frac{8.7.6}{1.2.3}\,\mathfrak{C}.\mathfrak{E} + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\,\frac{\mathfrak{D}^2}{2};$$

und so weiter, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ etc. die Summen der ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften, sechsten, siebenten, achten etc. Potenzen aller Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Der allgemeine Ausdruck dieses Satzes ist also, daß man die Summen der r^{ten} Potenzen aller Wur-

zeln für die abgeleitete Gleichung findet, wenn man aus der Reihe

$$1,\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E}\ \text{etc.}$$

wo den einzelnen Gliedern die Zeiger

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \text{etc.}$$

zukommen, alle Produkte aus zwei Gröfsen zur Zeiger-Summe $= 2r$, sucht; dann dem ersten Produkte den Coefficienten n, den folgenden aber die Coefficienten $2r$, $\frac{2r.(2r-1)}{1\ .\ 2}$, $\frac{2r.(2r-1)(2r-2)}{1\ .\ 2\ \ \ 3}$ etc. gibt, sie abwechselnd mit $+$ und $-$ aufführt, alle ihre Permutationszahlen als Factoren und 2 als Divisor beifügt.

Beweis. Wenn ich die Wurzeln der gegebnen Gleichung $= \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. nenne, so erhält n die sämmtlichen verschiedenen Werthe, die aus $(\alpha-\beta^2)$; $(\alpha-\gamma)^2$; $(\alpha-\delta)^2$; etc.; $(\beta-\gamma)^2$; $(\beta-\delta)^2$ etc.; $(\gamma-\delta)^2$ etc. hervorgehen. Die Summe aller dieser Werthe enthält offenbar α^2, β^2, γ^2 etc. $(n-1)$ Mal und dann die negativen Produkte, $2\alpha\beta$, $2\alpha\gamma$ etc. Diese Summe ist also $=(n-1)\ \mathfrak{B}-2B$, oder da (§. 176.) $B=\frac{\mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}}{2}$ ist, diese Summe $= n.\mathfrak{B}-\mathfrak{A}^2 = n.\mathfrak{B}-\frac{2\mathfrak{A}^2}{2}$.

Die Summe der zweiten Potenzen aller jener Werthe oder $(\alpha-\beta)^4+(\alpha-\gamma)^4$ etc. enthält $(n-1)\ (\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\text{etc.})$, und dann die Produkte

$$-4(\alpha^3\beta+\alpha^3\gamma+\text{etc.}+\beta^3\alpha+\beta^3\gamma+\text{etc.})$$

endlich die Produkte $+\frac{4.3}{1.2}(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\text{etc.}+\beta^2\gamma^2+\text{etc.})$

Sie ist also $=(n-1)\mathfrak{D}-4\,(\mathfrak{C}\mathfrak{A}-\mathfrak{D})+6\,\frac{(\mathfrak{B}-^2\mathfrak{D})}{2}$;

$$= n\mathfrak{D}-4.\mathfrak{C}\mathfrak{A}+6.\ \frac{\mathfrak{B}^2}{2}.$$

Für die folgenden Potenzen läfst sich der Beweis so fortführen.

Beispiel. Es sey $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ eine Gleichung, deren vier Wurzeln $= \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind; also die Wurzeln der zugehörigen Gleichung $(\alpha-\beta)^2$; $(\alpha-\gamma)^2$; $(\alpha-\delta)^2$; $(\beta-\gamma)^2$; $(\beta-\delta)^2$; $(\gamma-\delta)^2$, an der Zahl $= \frac{4.3}{2} = 6$, so ist ja die Summe dieser Wurzeln $=$

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta$$
$$+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma+\beta^2+\delta^2-2\beta\delta+\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta,$$
$$=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)$$
$$=3\mathfrak{B}-2B=4\mathfrak{B}-\mathfrak{A}^2;$$

Ferner die Summe der zweiten Potenzen

$$=(\alpha-\beta)^4+(\alpha-\gamma)^4+(\alpha-\delta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\beta-\delta)^4+(\gamma-\delta)^4,$$
$$=3(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4-4)\alpha^3(\beta+\gamma+\delta)+\beta^3(\alpha+\gamma+\delta)+\gamma^3(\alpha+\beta+\delta)$$
$$+\delta^3(\alpha+\beta+\gamma))$$
$$+6(\alpha^2(\beta^2+\gamma^2+\delta^2)+\beta^2(\gamma^2+\delta^2)+\gamma^2\delta^2)$$

$=3\mathfrak{D}-4(\mathfrak{C}\mathfrak{A}-\mathfrak{D})+6\frac{\mathfrak{B}^2}{2}$ weil $\mathfrak{B}^2$ die Produkte $\alpha^2\beta^2$ etc. sämmtlich doppelt enthält.

179. Die so gefundenen Summen der Wurzeln und ihrer Potenzen dienen nun nach §. 176. um die Coefficienten zu finden.

Beispiel. Es sey $x^3 - 7x^2 - 33x + 135 = 0$ eine Gleichung, deren Wurzeln unbekannt sind: so ist hier $A = 7$; $B = -33$; $C = -135$; also nach §. 172,
die Summe der unbekannten Wurzeln $= 7 = \mathfrak{A}$;
die Summe ihrer 2. Pot. $= 7.7 + 2.33 = 115 = \mathfrak{B}$;
die Summe der 3. Pot. $= 7.115 + 33.7 - 3.135 = 631 = \mathfrak{C}$;
die Summe der 4. Pot. $= 7.631 + 33.115 - 135.7 = 7267 = \mathfrak{D}$;
die Summe d. 5. Pot. $= 7.7267 + 33.631 - 135.115 = 56167 = \mathfrak{E}$;
d. Summe d. 6. P. $= 7.56167 + 33.7267 - 135.631 = 547795 = \mathfrak{F}$.

Für die Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Unterschiede jener Wurzeln sind, ist also (nach §. 178.)
die Summe der Wurzeln $= 3.115 - 49 = 296$;
die Summe ihrer 2. Pot. $= 3.7267 - 4.7.631 + 3.115^2 = 43808$.
d. Summe ihrer 3. Pot. $= 3.547795 - 6.7.56167 + 15.115.7267$
$- 10.631^2 = 7838336$.

Sucht man hieraus endlich die Coefficienten der Gleichung für u, so ist (§. 176.)

$$a = 296; \quad b = 21904; \quad c = 451584.$$

M

Jene Gleichung

$$x^3 - 7x^2 - 33x + 135 = 0$$

hat die Wurzeln $= -5$; $= 3$; $= 9$;
deren Unterschiede $= 6$; $= 8$; $= 14$ sind, und die Quadrate der Unterschiede $= 36$; $= 64$; $= 196$; sind die Wurzeln der zuletzt bestimmten neuen Gleichung

$$u^3 - 296u^2 + 21904\,u - 451584 = 0.$$

180. Wie Bestimmungen dieser Art nützlich werden können, muſs man in Büchern, welche die Auflösung der Gleichungen betreffen (z. B. in Lagrange de la resolution des équations numériques) nachsehen; hier mögen diese Beispiele hinreichen, um zu zeigen, wie oft die Betrachtungen Anwendung finden, mit welchen wir uns in der vorigen Abtheilung beschäftigt haben.

Druckfehler.

S. 13. Z. 3. statt: 3.9^2, lies: $3g^2$.

S. 17. Z. 6 von unten; statt: (n.3) lies: (n—3).

S. 18. Z. 19. statt: (n^2-3n+1) lies: $(3n^2-3n+1)$.

S. 19. Z. 5 von unten; statt: a, lies: α.

S. 22. Z. 7 von unten; statt: $\frac{b+na+n(n-1)}{1.2}d$.

lies: $b+na+\frac{n(n-1)}{1.2}d$.

S. 24. Z. 18. statt: $(n-2(n-3)$, lies: $(n-2)(n-3)$.

S. 27. Z. 8. muſs oft weggestrichen werden.

S. 31. Z. 16. lies: jede jener.

S. 37. Z. 17. lies: höheren Stellen.

S. 44. Z. 26. lies: im Nenner: $1.2.3...q$.

S. 63. Z. 4 von unten; lies: aus den r.





